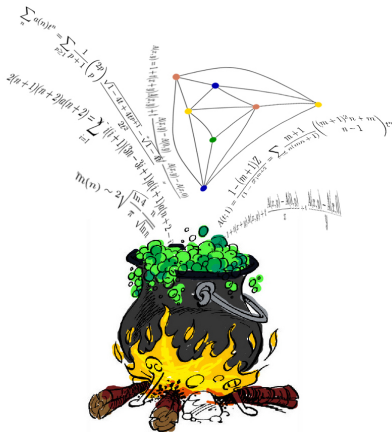


Méli-mélo(u) de combinatoire

Mireille Bousquet-Mélou, CNRS, LaBRI, Université de Bordeaux





c'est ici

Au LaBRI



c'est ici

Au LaBRI



Xavier Viennot



|



c'est ici



Xavier Viennot



Combinatoire énumérative



c'est ici



Xavier Viennot



|

Combinatoire énumérative

$$a(n) = \dots$$

$$\sum_n a(n)t^n = \dots$$

et l'asymptotique ?
Philippe Flajolet



$$a(n) \sim \dots$$
$$\sum_n a(n)z^n \sim \dots$$



c'est ici



Xavier Viennot



Combinatoire énumérative

$$a(n) = \dots$$

$$\sum_n a(n)t^n = \dots$$

et l'asymptotique ?
Philippe Flajolet



c'est ici

et l'asymptotique ? (bis)
Tony Guttmann



$$a(n) \sim \dots$$
$$\sum_n a(n)z^n \sim \dots$$



Physique statistique



Xavier Viennot



Combinatoire énumérative

$$a(n) = \dots$$

$$\sum_n a(n)t^n = \dots$$

et l'asymptotique ?
Philippe Flajolet



$$a(n) \sim \dots$$
$$\sum_n a(n)z^n \sim \dots$$



c'est ici

et l'asymptotique ? (bis)
Tony Guttmann

Génération aléatoire

Lois limites

Calcul formel

Transitions de phase



Physique statistique

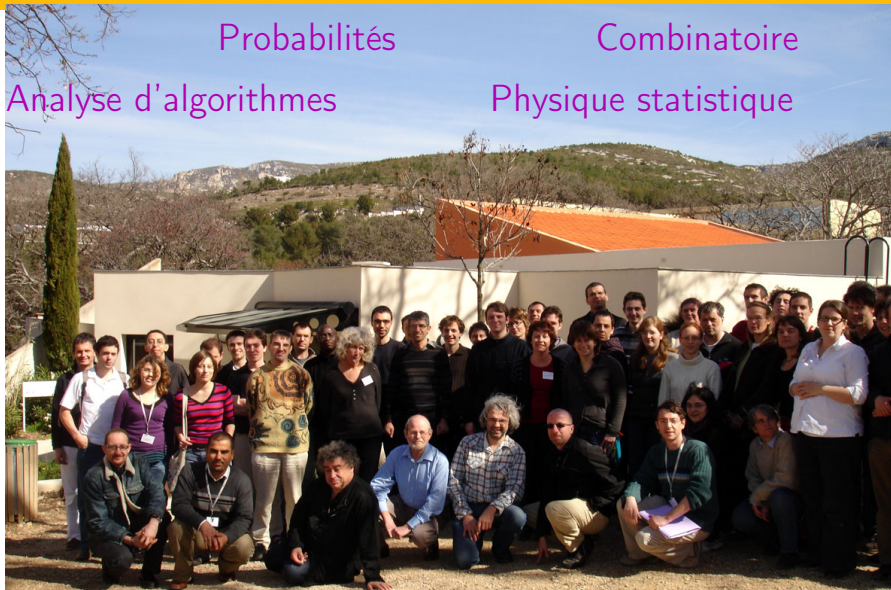
Le groupe de travail ALEA (GDR Informatique mathématique)

Probabilités

Combinatoire

Analyse d'algorithmes

Physique statistique



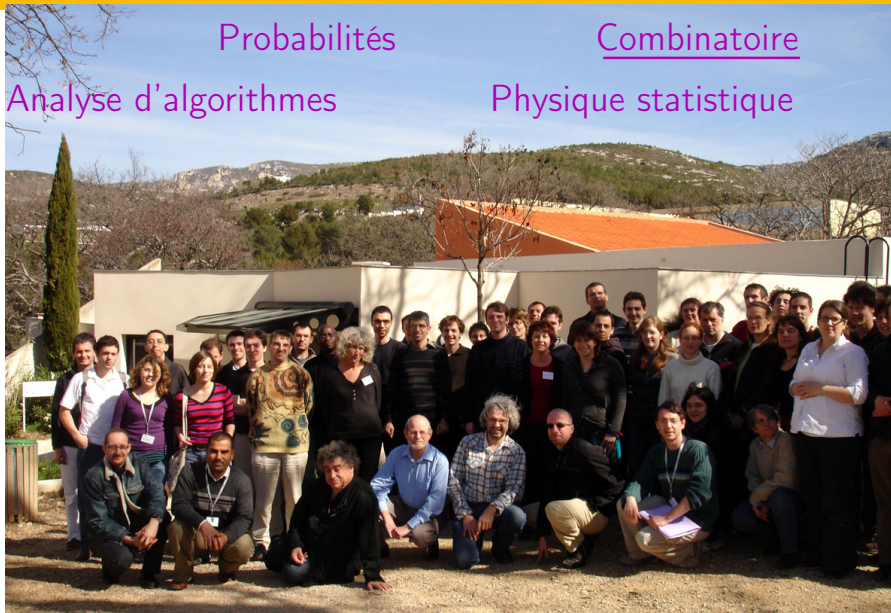
Le groupe de travail ALEA (GDR Informatique mathématique)

Probabilités

Combinatoire

Analyse d'algorithmes

Physique statistique



Combinatoire énumérative : l'art de compter

Combinatoire énumérative : l'art de compter

COMPTER [kɔ̃ t e]. I. V. tr. 1. Déterminer (une quantité) par le calcul ; spécialt. Établir le nombre de \Rightarrow chiffrer, dénombrer, nombrer.
Compter les moutons.



COMPTER [κ ð t e]. I. V. tr. 1. Déterminer (une quantité) par le calcul ; spécialt. Établir le nombre de \Rightarrow chiffrer, dénombrer, nombrer.
Compter les moutons.



COMPTER [κ ò t e]. I. V. tr. 1. Déterminer (une quantité) par le calcul ; spécialt. Établir le nombre de \Rightarrow chiffrer, dénombrer, nombrer.
Compter les moutons.

Combien ?

Combinatoire énumérative : l'art de compter

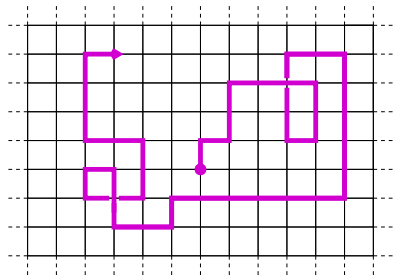


Combien...



Combien...

- de chemins de longueur n sur une grille carrée ?



$$a(n) = 4^n$$

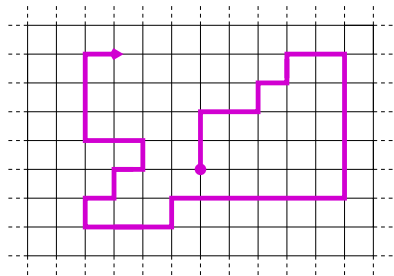
$$A(t) = \sum_n a(n)t^n = \frac{1}{1-4t}$$

Série génératrice



Combien...

- de chemins **auto-évitants** de longueur n sur une grille carrée ?

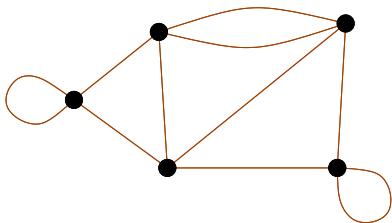


$$a(n) \sim c\mu^n n^{11/32} ?$$



Combien...

- de **cartes** à n arêtes ?



$$a(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$$

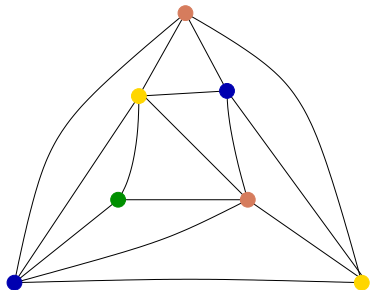
$$\sum_n a(n)t^n = \frac{(1-12t)^{3/2} - 1}{12t}$$

Série génératrice



Combien...

- de triangulations à n triangles, coloriées en 4 couleurs ?



$$2(n+1)(n+2)a(n+2) = \sum_{i=1}^n i(i+1)(3n-3i+1)a(i+1)a(n+2-i)$$

$$(2t + 5A(t) - 3tA'(t))A''(t) = 48t$$

Une médaille...

... de l'INSMI

Institut national des sciences **mathématiques** et de leur **interactions**

Des mathématiques ?

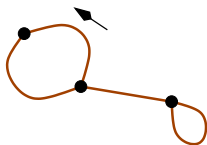
Des mathématiques ?

⇒ résoudre des équations !

Bijections vs. équations

Bijections vs. équations

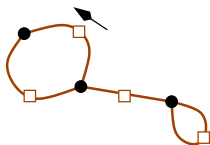
Le nombre de cartes planaires à n arêtes est $a(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$



Bijections vs. équations

Le nombre de cartes planaires à n arêtes est $a(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$

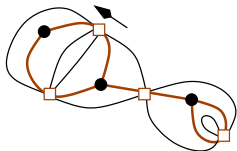
- Preuve bijective [Schaeffer, 1997]



Bijections vs. équations

Le nombre de cartes planaires à n arêtes est $a(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$

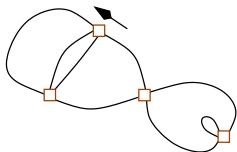
- Preuve bijective [Schaeffer, 1997]



Bijections vs. équations

Le nombre de cartes planaires à n arêtes est $a(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$

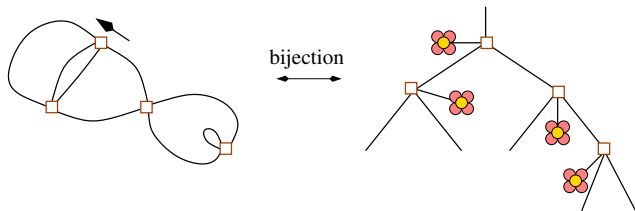
- Preuve bijective [Schaeffer, 1997]



Bijections vs. équations

Le nombre de cartes planaires à n arêtes est $a(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$

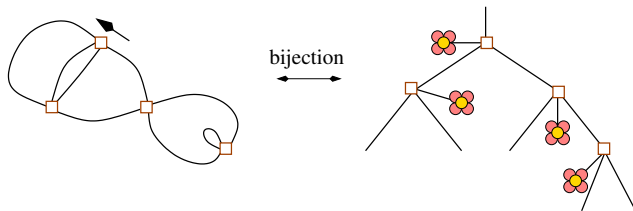
- Preuve bijective [Schaeffer, 1997]



Bijections vs. équations

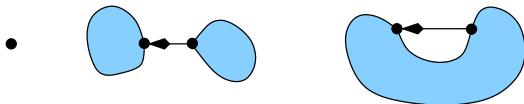
Le nombre de cartes planaires à n arêtes est $a(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$

- Preuve bijective [Schaeffer, 1997]



- Preuve récursive [Tutte, 60's]: $\sum_n a(n)t^n = A(t; 1)$ avec

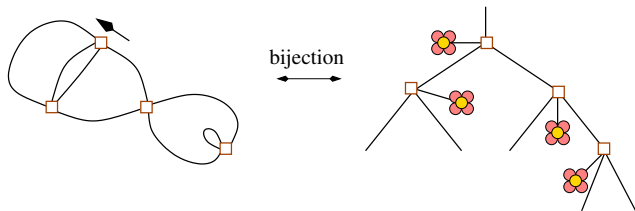
$$A(t; x) = 1 + tx^2A(t; x)^2 + tx \frac{x A(t; x) - A(t; 1)}{x - 1}$$



Bijections vs. équations

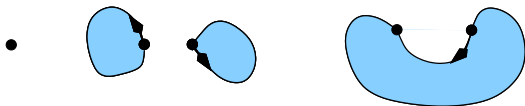
Le nombre de cartes planaires à n arêtes est $a(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$

- Preuve bijective [Schaeffer, 1997]



- Preuve récursive [Tutte, 60's]: $\sum_n a(n)t^n = A(t; 1)$ avec

$$A(t; x) = 1 + tx^2A(t; x)^2 + tx \frac{x A(t; x) - A(t; 1)}{x - 1}$$



Bijections vs. équations

Les bijections

- c'est beau... mais c'est dur !

Bijections vs. équations

Les bijections

- c'est beau... mais c'est dur !

Les approches récursives

- sont (souvent) plus robustes
- la fin justifie les moyens...

Bijections vs. équations

Les bijections

- c'est beau... mais c'est dur !

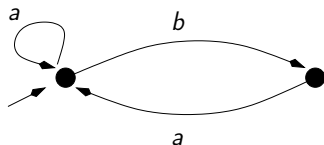
Les approches récursives

- sont (souvent) plus robustes
- la fin justifie les moyens...

adieu l'élégance !

Énumération et équations fonctionnelles

- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : équations différentielles discrètes (à coeffs. polynomiaux)



$$A(t) = 1 + tA(t) + tB(t)$$

$$B(t) = tA(t)$$

Énumération et équations fonctionnelles

- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : équations différentielles discrètes (à coeffs. polynomiaux)

The diagrammatic equation shows a large brown inverted triangle on the left, followed by an equals sign, a small green dot, a plus sign, and a diagram of two brown inverted triangles joined at their bottom vertices by a line, with a small brown dot at the junction. Below these diagrams is the algebraic equation $A(t) = 1 + tA(t)^2$.

$$A(t) = 1 + tA(t)^2$$

Énumération et équations fonctionnelles

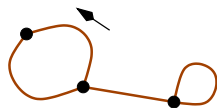
- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : **équations différentielles discrètes** (à coeffs. polynomiaux)

Énumération et équations fonctionnelles

- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : **équations différentielles discrètes** (à coeffs. polynomiaux)

Équation quadratique pour les cartes :

$$A(t; x) = 1 + tx^2 A(t; x)^2 + tx \frac{x A(t; x) - A(t; 1)}{x - 1}$$

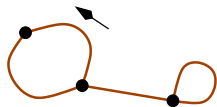


Énumération et équations fonctionnelles

- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : **équations différentielles discrètes** (à coeffs. polynomiaux)

Équation quadratique pour les cartes :

$$\begin{aligned}A(x) &= 1 + tx^2A(x)^2 + tx \frac{x A(x) - A(1)}{x - 1} \\ &= 1 + tx^2A(x)^2 + tx \Delta_{x,1}(xA(x))\end{aligned}$$



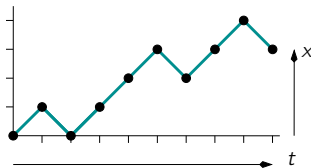
$\Delta_{x,1}$: opérateur de dérivée discrète

Énumération et équations fonctionnelles

- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : **équations différentielles discrètes** (à coeffs. polynomiaux)

Équation linéaire :

$$\begin{aligned}A(t; x) &= 1 + txA(x) + t \frac{A(x) - A(0)}{x} \\ &= 1 + txA(x) + t \Delta_{x,0}(A(x))\end{aligned}$$

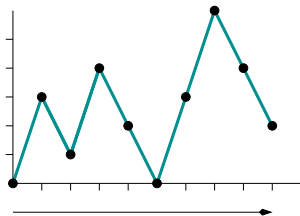


Énumération et équations fonctionnelles

- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : **équations différentielles discrètes** (à coeffs. polynomiaux)

Équation d'ordre > 1 :

$$A(x) = 1 + tx^3A(x) + t \frac{A(x) - A(0) - xA'(0)}{x^2}$$



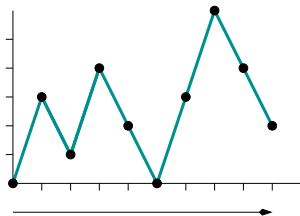
Énumération et équations fonctionnelles

- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : **équations différentielles discrètes** (à coeffs. polynomiaux)

Équation d'ordre > 1 :

$$A(x) = 1 + tx^3A(x) + t \frac{A(x) - A(0) - xA'(0)}{x^2}$$

$\Delta_{x,0}^{(2)}$

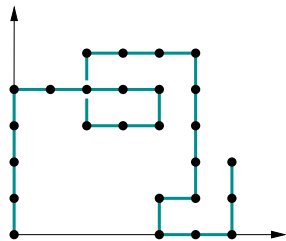


Énumération et équations fonctionnelles

- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : **équations différentielles discrètes** (à coeffs. polynomiaux)

Équation aux dérivées (discrètes) partielles :

$$A(t; x, y) = A(x, y) = 1 + t(x + y)A(x, y) + t \frac{A(x, y) - A(0, y)}{x} + t \frac{A(x, y) - A(x, 0)}{y}$$



Des mathématiques ?

⇒ résoudre des équations !

Des mathématiques ?

⇒ résoudre des équations !
du moins, ranger un peu leurs solutions



Des mathématiques ?

⇒ résoudre des équations !
du moins, ranger un peu leurs solutions

- Séries rationnelles

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$



Des mathématiques ?

⇒ résoudre des équations !
du moins, ranger un peu leurs solutions

- Séries rationnelles

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

- Séries algébriques

$$P(t, A(t)) = 0$$



Des mathématiques ?

⇒ résoudre des équations !
du moins, ranger un peu leurs solutions

- Séries rationnelles

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

- Séries algébriques

$$P(t, A(t)) = 0$$

- Séries différentiellement finies (D-finies)

$$\sum_{i=0}^d P_i(t)A^{(i)}(t) = 0$$



Des mathématiques ?

⇒ résoudre des équations !
du moins, ranger un peu leurs solutions

- Séries rationnelles

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

- Séries algébriques

$$P(t, A(t)) = 0$$

- Séries différentiellement finies (D-finies)

$$\sum_{i=0}^d P_i(t) A^{(i)}(t) = 0$$

- Séries D-algébriques

$$P(t, A(t), A'(t), \dots, A^{(d)}(t)) = 0$$



Les équations différentielles discrètes ordinaires, c'est facile

Théorème [mbm-Jehanne 2006]

Toute série $A(t; x)$ solution d'une équation différentielle discrète^a ordinaire est algébrique :

$$P(t, x, A(t; x)) = 0$$

^apropre

Théorème [mbm-Jehanne 2006]

Toute série $A(t; x)$ solution d'une équation différentielle discrète^a ordinaire est algébrique :

$$P(t, x, A(t; x)) = 0$$

^apropre

- Cartes planaires

$$A(t; x) = 1 + tx^2A(t; x)^2 + tx \frac{x A(t; x) - A(t; 1)}{x - 1}$$

Théorème [mbm-Jehanne 2006]

Toute série $A(t; x)$ solution d'une équation différentielle discrète^a ordinaire est algébrique :

$$P(t, x, A(t; x)) = 0$$

^apropre

- Cartes planaires

$$A(t; x) = 1 + tx^2A(t; x)^2 + tx \frac{x A(t; x) - A(t; 1)}{x - 1}$$
$$\Rightarrow 27t^2 A(t; 1)^2 + (1 - 18t)A(t; 1) + 16t - 1 = 0$$

Les équations différentielles discrètes ordinaires, c'est facile

Théorème [mbm-Jehanne 2006]

Toute série $A(t; x)$ solution d'une équation différentielle discrète^a ordinaire est algébrique :

$$P(t, x, A(t; x)) = 0$$

^apropre

- Cartes planaires proprement 3-coloriées

$$A(t; x) \equiv A(x) = 1 + tx^2 \frac{P(t, x, A(x), \Delta A(x), \Delta^{(2)} A(x), \Delta^{(3)} A(x))}{2(2x+1)(x+2)(x+1)}$$

Les équations différentielles discrètes ordinaires, c'est facile

Théorème [mbm-Jehanne 2006]

Toute série $A(t; x)$ solution d'une équation différentielle discrète^a ordinaire est algébrique :

$$P(t, x, A(t; x)) = 0$$

^apropre

- Cartes planaires proprement 3-coloriées

$$A(t; x) \equiv A(x) = 1 + tx^2 \frac{P(t, x, A(x), \Delta A(x), \Delta^{(2)} A(x), \Delta^{(3)} A(x))}{2(2x+1)(x+2)(x+1)}$$

$$\Rightarrow A(t; 1) = \frac{(1+2S)(1-2S^2-4S^3-4S^4)}{(1-2S^3)^2}$$

avec $S(1-2S^3) = t(1+2S)^3$.

Les équations différentielles discrètes ordinaires, c'est facile

Quelques os quand même :

- c'est effectif... en théorie \Rightarrow calcul formel

Les équations différentielles discrètes ordinaires, c'est facile

Quelques os quand même :

- c'est effectif... en théorie \Rightarrow calcul formel
- si l'ordre de l'équation est un paramètre

Exemple : intervalles du treillis de m -Tamari

$$A(t; x) \equiv A(x) = x + xt (A(x) \cdot \Delta_{x,1})^{(m)} (A(x))$$

Les équations différentielles discrètes ordinaires, c'est facile

Quelques os quand même :

- c'est effectif... en théorie \Rightarrow calcul formel
- si l'ordre de l'équation est un paramètre

Exemple : intervalles du treillis de m -Tamari

$$A(t; x) \equiv A(x) = x + xt (A(x) \cdot \Delta_{x,1})^{(m)} (A(x))$$

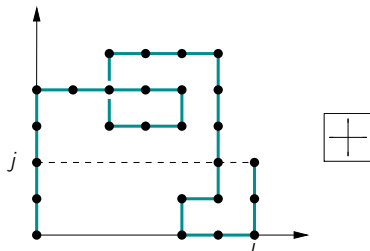
Soit $S \equiv S(t)$ la série solution de $t = S(1 - S)^{m^2+2m}$. Alors

$$A(t; 1) = \frac{1 - (m+1)S}{(1-S)^{m+2}} = \sum_{n \geq 0} \frac{m+1}{n(mn+1)} \binom{(m+1)^2 n + m}{n-1} t^n.$$

avec **Éric Fusy** et **Louis-François Prévaille-Ratelle**, 2011

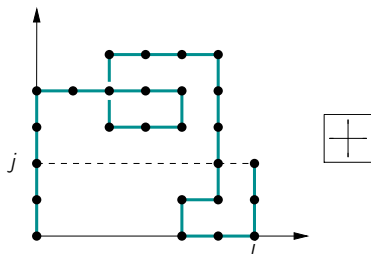
Les équations aux dérivées partielles discrètes, c'est moins facile. Même dans le cas linéaire !

Dérivées par rapport à deux variables : chemins du quart de plan



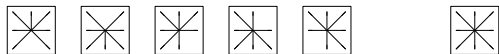
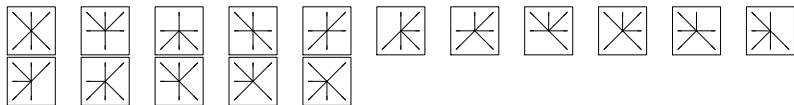
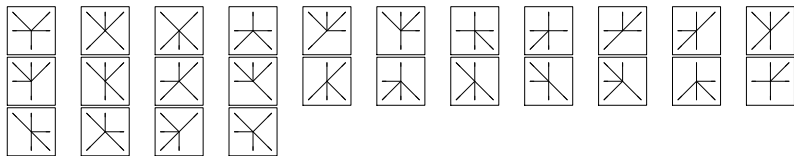
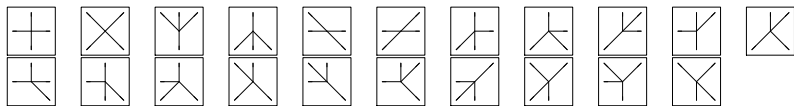
Les équations aux dérivées partielles discrètes, c'est moins facile. Même dans le cas linéaire !

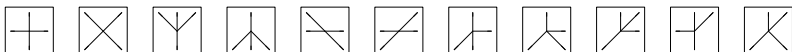
Dérivées par rapport à deux variables : chemins du quart de plan



$$A(x, y) = 1 + t(x + y)A(x, y) + t \frac{A(x, y) - A(0, y)}{x} + t \frac{A(x, y) - A(x, 0)}{y}$$

$$A = 1 + t(x + y)A + t\Delta_{x,0}A + t\Delta_{y,0}A$$





Les équations aux dérivées partielles discrètes, c'est moins facile. Même dans le cas linéaire !

Dérivées par rapport à deux variables : chemins du quart de plan



Algébrique

$$A(x, y) = 1 + txyA + t\Delta_{x,0}A + t\Delta_{y,0}A$$



D-fini mais transcendant

$$A(x, y) = 1 + t(x + y)A + t\Delta_{x,0}A + t\Delta_{y,0}A$$



Pas D-fini

$$A(x, y) = 1 + tx(1 + y)A + t\Delta_{x,0}A + t\Delta_{y,0}A$$

Les équations aux dérivées partielles discrètes, c'est moins facile. Même dans le cas linéaire !

Dérivées par rapport à deux variables : chemins du quart de plan



Algébrique

$$A(x, y) = 1 + txyA + t\Delta_{x,0}A + t\Delta_{y,0}A$$



D-fini mais transcendant

$$A(x, y) = 1 + t(x + y)A + t\Delta_{x,0}A + t\Delta_{y,0}A$$



Pas D-fini

$$A(x, y) = 1 + tx(1 + y)A + t\Delta_{x,0}A + t\Delta_{y,0}A$$

Mais pourquoi ? (et comment ?)

Classification des chemins du quart de plan à petits pas

Théorème

La série $A(t; x, y)$ est D-finie ssi un certain groupe^a est fini.
Elle est algébrique ssi, en prime, la “somme d’orbite”^b s’annule.

[mbm-Mishna 10], [Bostan-Kauers 10]

D-finie

[Kurkova-Raschel 12]

non-singulier non-D-finie

[Mishna-Rechnitzer 07], [Melczer-Mishna 13]

singulier non-D-finie

^ade transformation birationnelles

^bune fraction rationnelle déduite du groupe

Les équations aux dérivées partielles discrètes, c'est moins facile. Même dans le cas linéaire !

Du grain à moulin :

- chemins du quadrant avec des grands pas (avec Alin Bostan, et Steve Melczer)
- plus de variables : chemins dans un cône 3D \Rightarrow classification (presque) complète (avec Alin Bostan, Manuel Kauers, Steve Melczer, 2014)
- avec m variables : permutations sans sous-suite croissante de longueur $m + 1 \Rightarrow$ série D-finie [mbm 2010]

Les équations aux dérivées partielles discrètes, c'est moins facile. Même dans le cas linéaire !

Du grain à moulin :

- chemins du quadrant avec des grands pas (avec Alin Bostan, et Steve Melczer)
- plus de variables : chemins dans un cône 3D \Rightarrow classification (presque) complète (avec Alin Bostan, Manuel Kauers, Steve Melczer, 2014)
- avec m variables : permutations sans sous-suite croissante de longueur $m + 1 \Rightarrow$ série D-finie [mbm 2010]

Les équations aux dérivées partielles discrètes, c'est moins facile. Même dans le cas linéaire !

Du grain à moulin :

- chemins du quadrant avec des grands pas (avec Alin Bostan, et Steve Melczer)
- plus de variables : chemins dans un cône 3D \Rightarrow classification (presque) complète (avec Alin Bostan, Manuel Kauers, Steve Melczer, 2014)
- avec m variables : permutations sans sous-suite croissante de longueur $m + 1 \Rightarrow$ série D-finie [mbm 2010]



Les équations aux dérivées partielles discrètes non linéaires, c'est encore moins facile

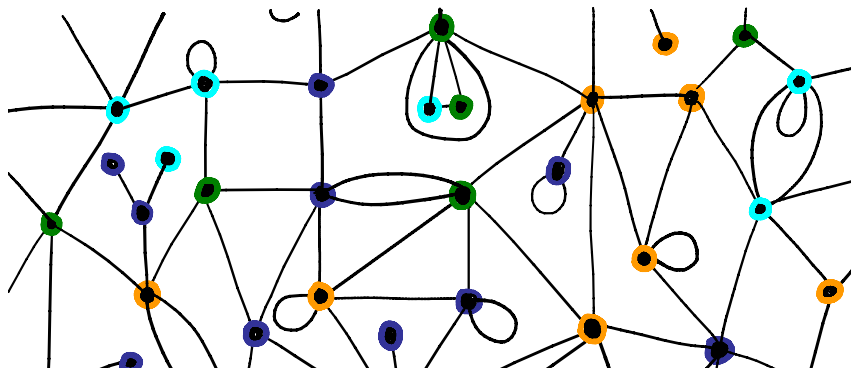
Un (seul) exemple : le modèle de Potts sur les cartes planaires

$$\begin{aligned} A(x, y) = & 1 + xyt((\nu - 1)(y - 1) + qy) A(x, y)A(1, y) \\ & + xyt(x\nu - 1)A(x, y)A(x, 1) \\ & + xyt(\nu - 1) \frac{x A(x, y) - A(1, y)}{x - 1} + xyt \frac{y A(x, y) - A(x, 1)}{y - 1} \end{aligned}$$

Les équations aux dérivées partielles discrètes non linéaires, c'est encore moins facile

Un (seul) exemple : le modèle de Potts sur les cartes planaires

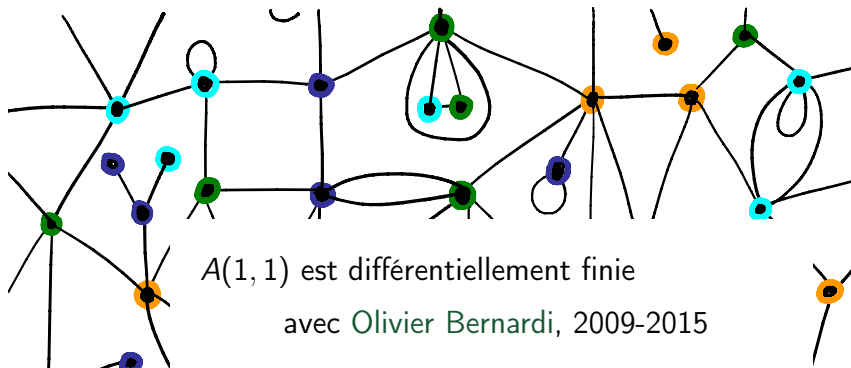
$$\begin{aligned} A(x, y) = & 1 + xyt ((\nu - 1)(y - 1) + qy) A(x, y)A(1, y) \\ & + xyt(x\nu - 1)A(x, y)A(x, 1) \\ & + xyt(\nu - 1) \frac{x A(x, y) - A(1, y)}{x - 1} + xyt \frac{y A(x, y) - A(x, 1)}{y - 1} \end{aligned}$$



Les équations aux dérivées partielles discrètes non linéaires, c'est encore moins facile

Un (seul) exemple : le modèle de Potts sur les cartes planaires

$$\begin{aligned} A(x, y) = & 1 + xyt \left((\nu - 1)(y - 1) + qy \right) A(x, y)A(1, y) \\ & + xyt(x\nu - 1)A(x, y)A(x, 1) \\ & + xyt(\nu - 1) \frac{x A(x, y) - A(1, y)}{x - 1} + xyt \frac{y A(x, y) - A(x, 1)}{y - 1} \end{aligned}$$



$A(1, 1)$ est différentiellement finie

avec Olivier Bernardi, 2009-2015

Une médaille...

... de l'INSMI

Institut national des sciences **mathématiques** et de leur **interactions**

- résoudre des équations !
- et les interactions ?

et les interactions ?

D'où viennent nos problèmes (d'énumération) ?

- de l'informatique
- de la physique statistique

et les interactions ?

D'où viennent nos problèmes (d'énumération) ?

- de l'informatique
- de la physique statistique
- et des maths...

et les interactions ?

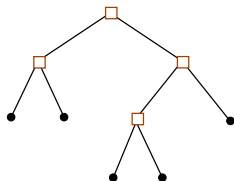
D'où viennent nos problèmes (d'énumération) ?

- de l'informatique
- de la physique statistique
- et des maths...

(un peu d'asymptotique)

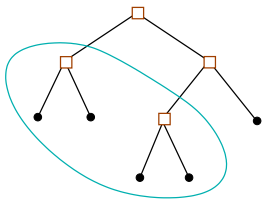
et les interactions ? Un exemple en informatique

Compression d'arbres



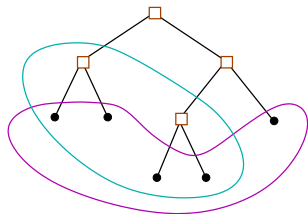
et les interactions ? Un exemple en informatique

Compression d'arbres



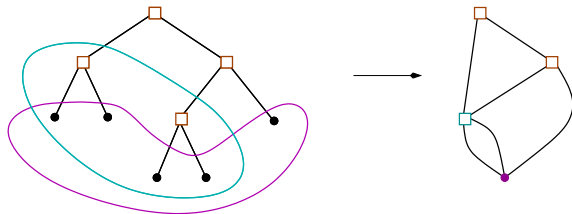
et les interactions ? Un exemple en informatique

Compression d'arbres



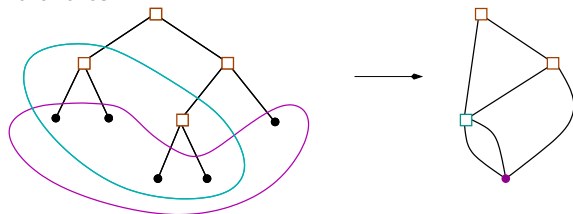
et les interactions ? Un exemple en informatique

Compression d'arbres



et les interactions ? Un exemple en informatique

Compression d'arbres

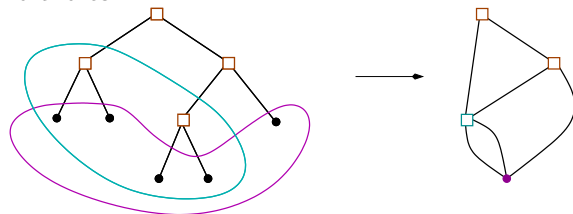


Le nombre moyen de sommets restants après compression d'un arbre de taille n satisfait

$$m(n) \sim 2\sqrt{\frac{\ln 4}{\pi}} \frac{n}{\sqrt{\ln n}}$$

et les interactions ? Un exemple en informatique

Compression d'arbres



Le nombre moyen de sommets restants après compression d'un arbre de taille n satisfait

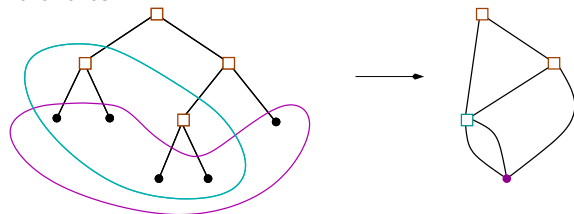
$$m(n) \sim 2\sqrt{\frac{\ln 4}{\pi}} \frac{n}{\sqrt{\ln n}}$$

⇒ Analyse asymptotique : estimer le coefficient de t^n dans

$$\sum_n a(n)t^n = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p+1} \binom{2p}{p} \frac{\sqrt{1-4t+4t^{p+1}} - \sqrt{1-4t}}{2t^2}$$

et les interactions ? Un exemple en informatique

Compression d'arbres



Le nombre moyen de sommets restants après compression d'un arbre de taille n satisfait

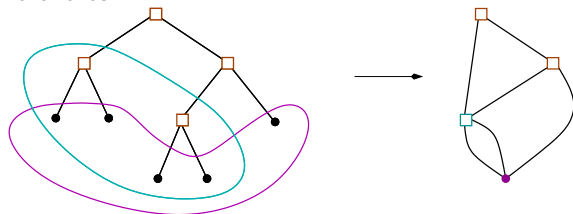
$$m(n) \sim 2\sqrt{\frac{\ln 4}{\pi}} \frac{n}{\sqrt{\ln n}}$$

⇒ Analyse asymptotique : estimer le coefficient de t^n dans

$$\sum_n a(n)t^n = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p+1} \binom{2p}{p} \frac{\sqrt{1-4t+4t^{p+1}} - \sqrt{1-4t}}{2t^2}$$

et les interactions ? Un exemple en informatique

Compression d'arbres



Le nombre moyen de sommets restants après compression d'un arbre de taille n satisfait

$$m(n) \sim 2\sqrt{\frac{\ln 4}{\pi}} \frac{n}{\sqrt{\ln n}}$$

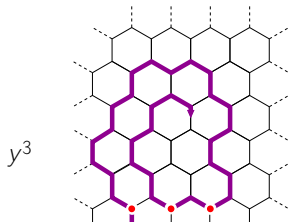
⇒ Analyse asymptotique : estimer le coefficient de t^n dans

$$\sum_n a(n)t^n = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p+1} \binom{2p}{p} \frac{\sqrt{1-4t+4t^{p+1}} - \sqrt{1-4t}}{2t^2}$$

et les interactions ? Un exemple (un peu) plus physique

et les interactions ? Un exemple (un peu) plus physique

Chemins auto-évitant dans un demi-plan, en interaction avec son bord :



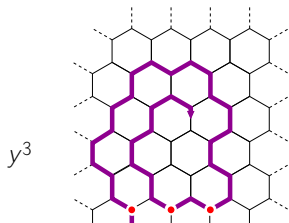
et les interactions ? Un exemple (un peu) plus physique

Chemins auto-évitants dans un demi-plan, en interaction avec son bord :

$$\mathbb{P}_n(\omega) = \frac{y^{\text{contacts}(\omega)}}{a_n(y)}$$

avec

$$a_n(y) = \sum_{|\omega|=n} y^{\text{contacts}(\omega)}$$



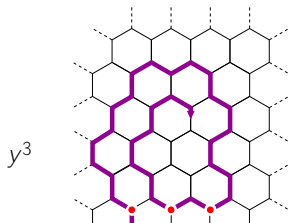
et les interactions ? Un exemple (un peu) plus physique

Chemins auto-évitants dans un demi-plan, en interaction avec son bord :

$$\mathbb{P}_n(\omega) = \frac{y^{\text{contacts}(\omega)}}{a_n(y)}$$

avec

$$a_n(y) = \sum_{|\omega|=n} y^{\text{contacts}(\omega)}$$



Théorème : localisation de la transition de phase (2012)

Pour $y > y_c = 1 + \sqrt{2}$, le chemin adhère au bord. Pour $y < y_c$, il s'en échappe.

avec Nick Beaton, Hugo Duminil-Copin, Jan de Gier et Tony Guttmann

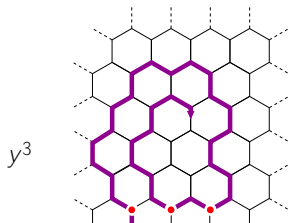
et les interactions ? Un exemple (un peu) plus physique

Chemins auto-évitant dans un demi-plan, en interaction avec son bord :

$$\mathbb{P}_n(\omega) = \frac{y^{\text{contacts}(\omega)}}{a_n(y)}$$

avec

$$a_n(y) = \sum_{|\omega|=n} y^{\text{contacts}(\omega)}$$



Théorème : localisation de la transition de phase (2012)

Pour $y > y_c = 1 + \sqrt{2}$, le chemin adhère au bord. Pour $y < y_c$, il s'en échappe.



avec Nick Beaton, Hugo Duminil-Copin, Jan de Gier et Tony Guttmann

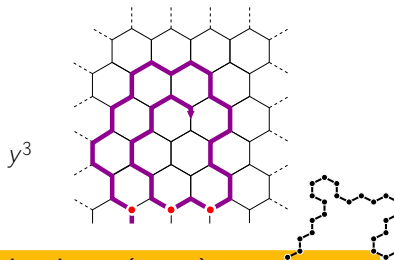
et les interactions ? Un exemple (un peu) plus physique

Chemins auto-évitants dans un demi-plan, en interaction avec son bord :

$$\mathbb{P}_n(\omega) = \frac{y^{\text{contacts}(\omega)}}{a_n(y)}$$

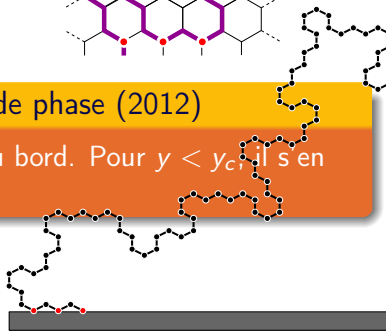
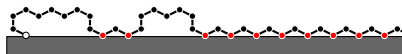
avec

$$a_n(y) = \sum_{|\omega|=n} y^{\text{contacts}(\omega)}$$



Théorème : localisation de la transition de phase (2012)

Pour $y > y_c = 1 + \sqrt{2}$, le chemin adhère au bord. Pour $y < y_c$, il s'en échappe.



avec Nick Beaton, Hugo Duminil-Copin, Jan de Gier et Tony Guttmann

et les interactions ?

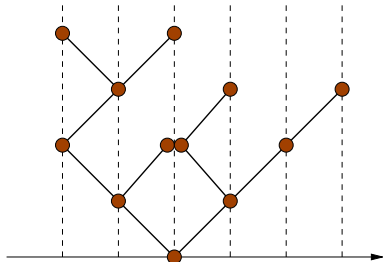
D'où viennent nos problèmes (d'énumération) ?

- de l'informatique
- de la physique statistique
- et des maths...
 - ▶ probabilités
 - ▶ algèbre

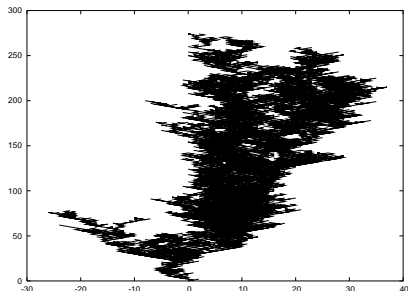
et les interactions ?

D'où viennent nos problèmes (d'énumération) ?

- de l'informatique
- de la physique statistique
- et des maths...
 - ▶ probabilités
 - ▶ algèbre



[mbm 2006]



Integrated SuperBrownian
Excursion (ISE) [Aldous 93]

et les interactions ?

D'où viennent nos problèmes (d'énumération) ?

- de l'informatique
- de la physique statistique
- et des maths...
 - ▶ probabilités
 - ▶ algèbre

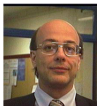
À résoudre :

$$A(x) = \exp \left(\sum_{k \geq 1} \frac{p_k}{k} \left(tx(A(x) \Delta_{x,1})^{(m)} \right)^{(k)} \right) (x)$$

⇒ Caractère d'une représentation du groupe symétrique (espaces diagonaux covariants) [Bergeron 2011]

avec Guillaume Chapuy et Louis-François Prévile-Ratelle, 2013

avec, par ordre d'apparition...



avec, par ordre d'apparition...



merci !

- à l'INSMI

merci !

- à l'INSMI
- aux orateurs



merci !

- à l'INSMI
- aux orateurs



- aux organisateurs
Nicolas Bonichon, Adrien Boussicault, Auriane Dantes,
Vincent Delecroix, Olivier Guibert, Elia Meyre... et Pascal Weil

merci !

The image features a central illustration of a cooking pot on a fire, overflowing with green bubbles. Surrounding the pot are various mathematical elements:

- Top Left:** A summation formula:
$$\sum_n a(n) r^n = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p+1} \binom{2p}{p} \sqrt{1-4r+4r^2} - \sqrt{1-4r}$$
- Top Center:** A network graph with 6 nodes (red, blue, yellow, green, red, yellow) and several edges.
- Top Right:** A summation formula:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m+1}{(m+1)^n} \binom{(m+1)^2 n + m}{n-1} r^n$$
- Middle Left:** A summation formula:
$$2(n+1)(n+2)(n+3) = \sum_{i=1}^n i(i+1)(3i-3i+1)(3i-3i+1)(3i+1)(3i+2)$$
- Middle Right:** A brain illustration with a small graph on top and a bar chart below it.
- Bottom Left:** An asymptotic formula:
$$m(n) \sim 2\sqrt{\frac{\ln 4}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$$