

Arbres et cartes combinatoires: de l'énumération au codage compact

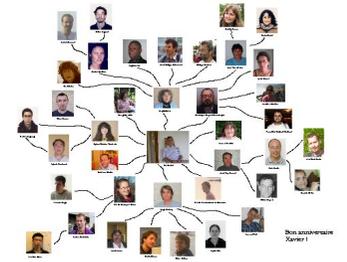
Gilles Schaeffer

CNRS, Laboratoire d'informatique de l'École Polytechnique

Bordeaux, 2 octobre 2014



arbre en automne



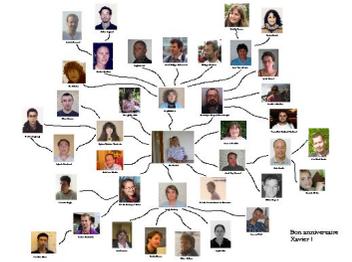
arbre généalogique



arbre de synthèse



arbre en automne



arbre généalogique

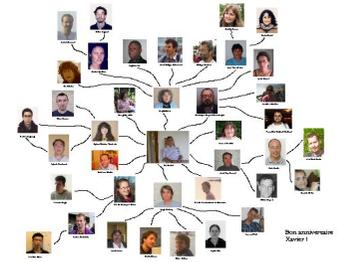
?



arbre de synthèse

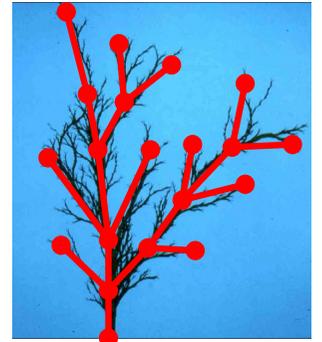


arbre en automne



arbre généalogique

?

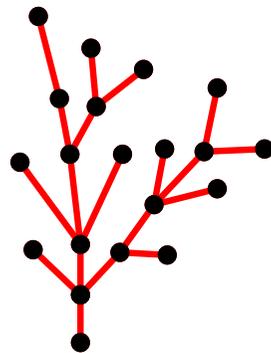


arbre de synthèse

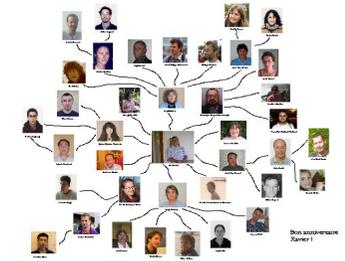
arbre combinatoire

≈

structure formée de **sommets**
liés par des **arêtes** formants
des branches indépendantes



arbre en automne



arbre généalogique

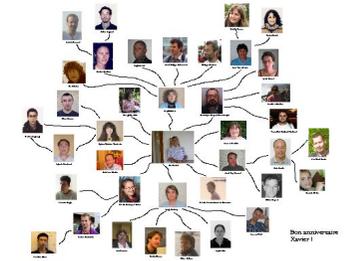


arbre de synthèse

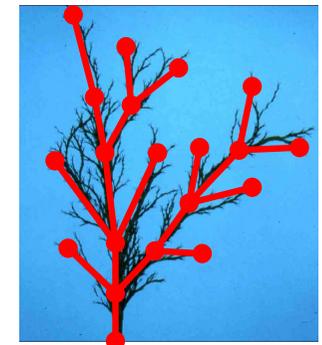
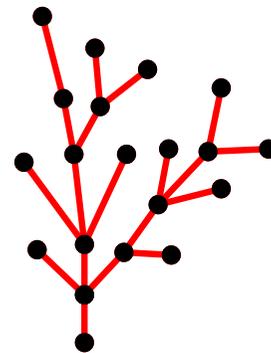
Objet combinatoire / abstraction discrète



arbre en automne



arbre généalogique



arbre de synthèse

arbre combinatoire

\approx

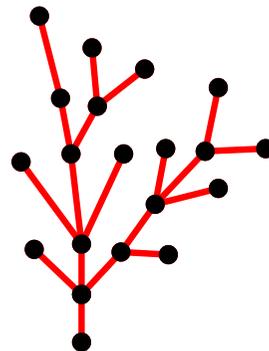
structure formée de **sommets**
liés par des **arêtes** formants
des branches indépendantes

Objet combinatoire / abstraction discrète

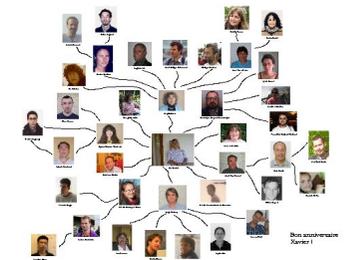
arbre combinatoire

\approx

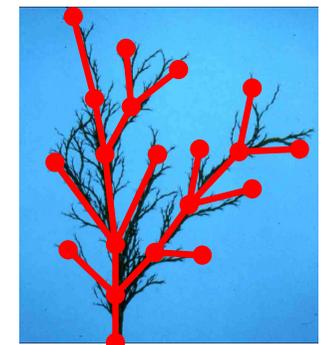
structure formée de **sommets**
liés par des **arêtes** formants
des branches indépendantes



arbre en automne

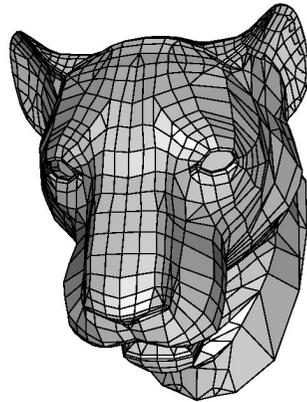
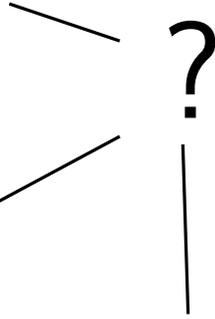
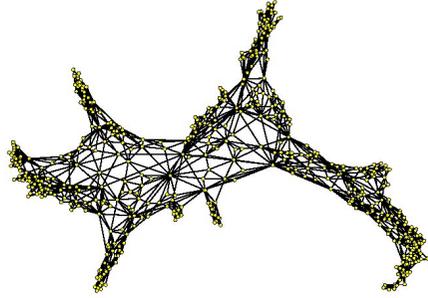


arbre généalogique



arbre de synthèse

Objet combinatoire / abstraction discrète



arbre en automne

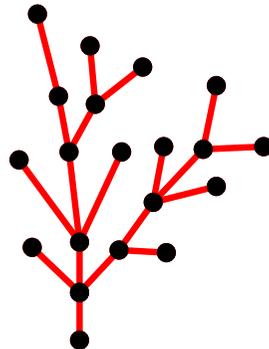


arbre généalogique

arbre combinatoire

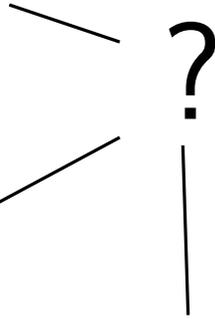
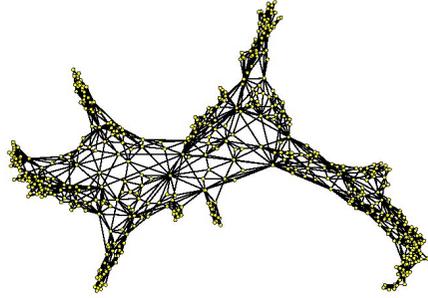
\approx

structure formée de **sommets**
liés par des **arêtes** formants
des branches indépendantes

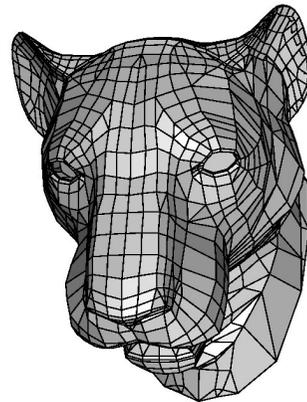


arbre de synthèse

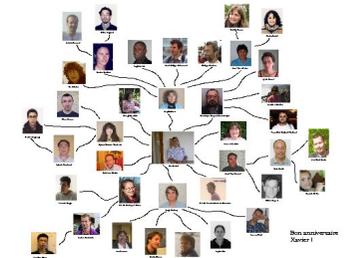
Objet combinatoire / abstraction discrète



carte géographique



arbre en automne

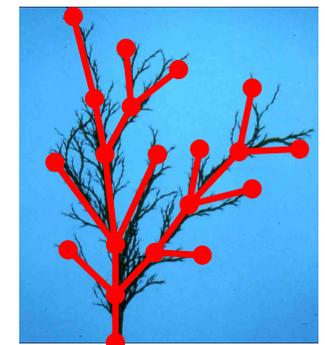
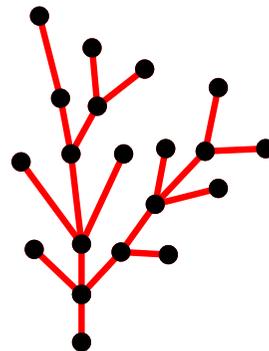


arbre généalogique

arbre combinatoire

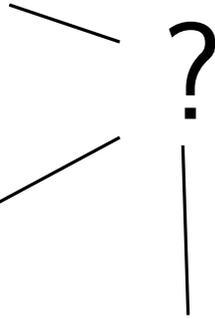
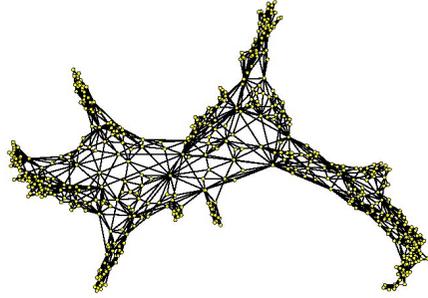
≈

structure formée de **sommets**
liés par des **arêtes** formants
des branches indépendantes

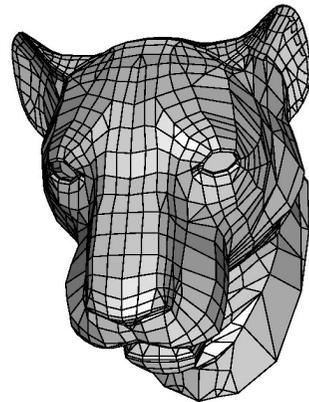


arbre de synthèse

Objet combinatoire / abstraction discrète



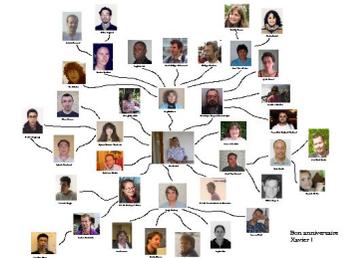
carte géographique



maillage surfacique



arbre en automne

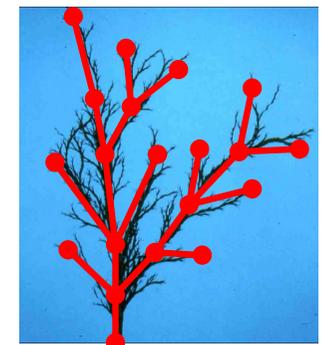
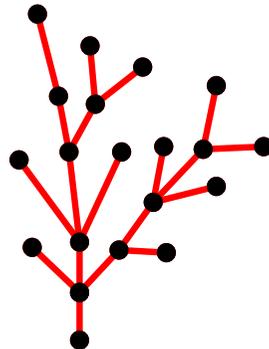


arbre généalogique

arbre combinatoire

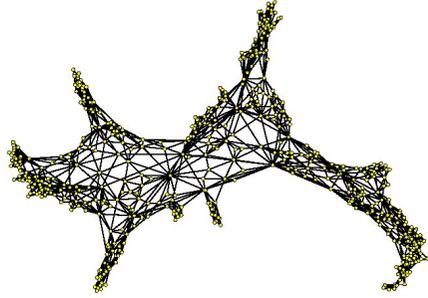
\approx

structure formée de **sommets**
liés par des **arêtes** formants
des branches indépendantes



arbre de synthèse

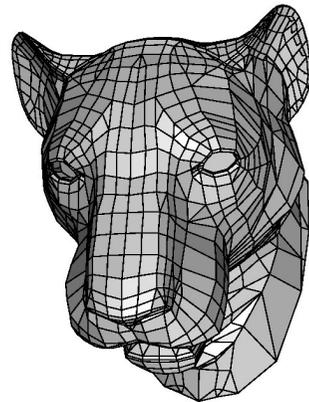
Objet combinatoire / abstraction discrète



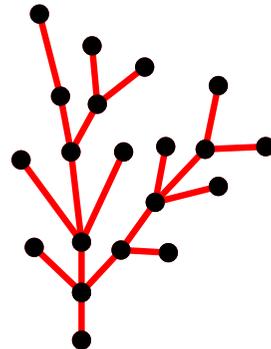
géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)



carte géographique



maillage surfacique



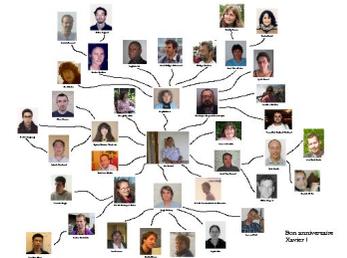
arbre combinatoire

\approx

structure formée de **sommets**
liés par des **arêtes** formants
des branches indépendantes



arbre en automne

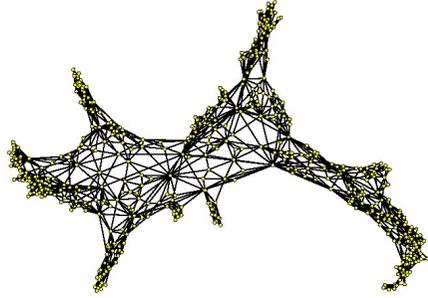


arbre généalogique



arbre de synthèse

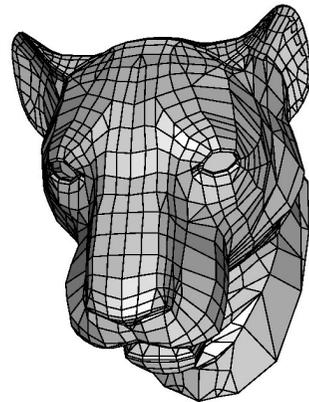
Objet combinatoire / abstraction discrète



géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)



carte géographique



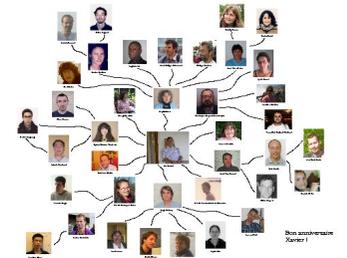
maillage surfacique

des objets qui décrivent des surfaces...

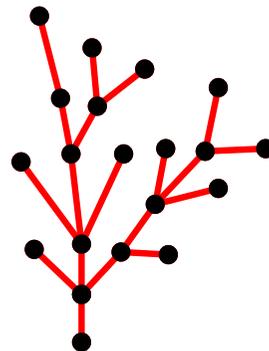
?



arbre en automne



arbre généalogique



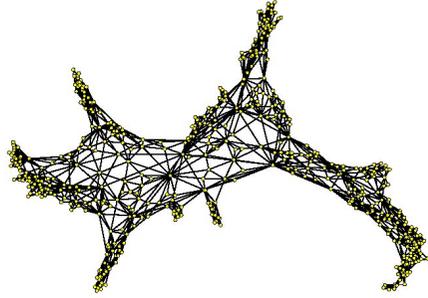
arbre de synthèse

arbre combinatoire

\approx

structure formée de **sommets**
liés par des **arêtes** formants
des branches indépendantes

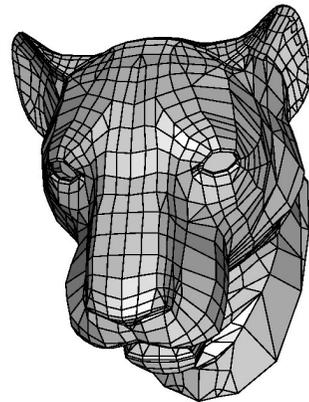
Objet combinatoire / abstraction discrète



géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)



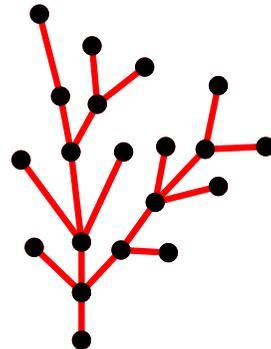
carte géographique



maillage surfacique

des objets qui décrivent des surfaces...

un modèle combinatoire ?



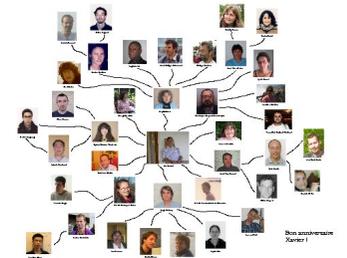
arbre combinatoire

\approx

structure formée de **sommets**
liés par des **arêtes** formants
des branches indépendantes



arbre en automne

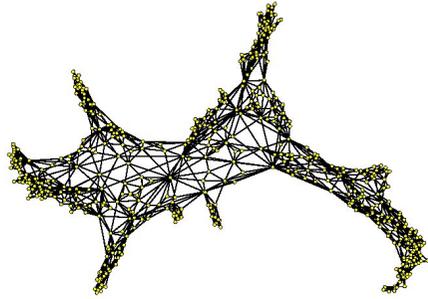


arbre généalogique

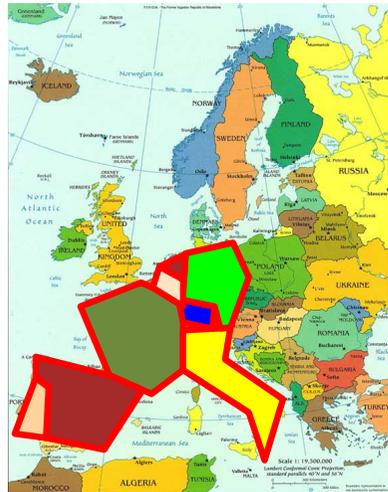


arbre de synthèse

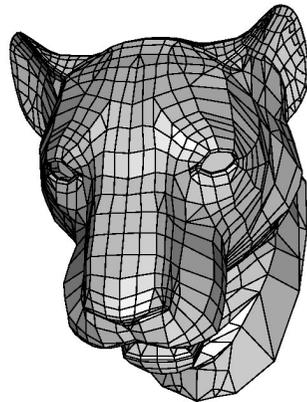
Objet combinatoire / abstraction discrète



géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)



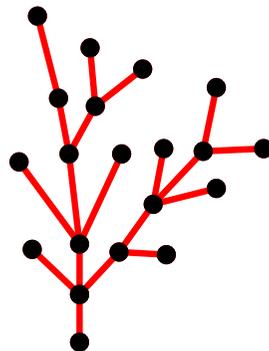
carte géographique



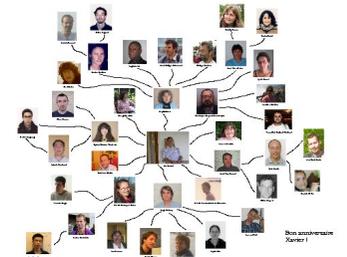
maillage surfacique

des objets qui décrivent des surfaces...

un modèle combinatoire ?



arbre en automne



arbre généalogique



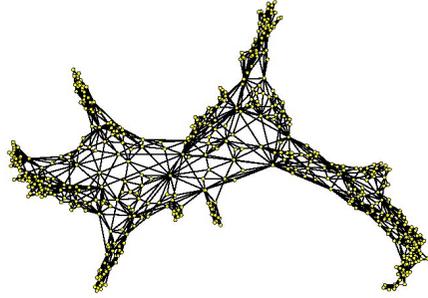
arbre de synthèse

arbre combinatoire

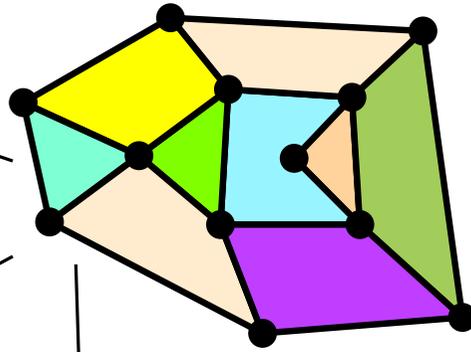
\approx

structure formée de **sommets**
liés par des **arêtes** formants
des branches indépendantes

Objet combinatoire / abstraction discrète

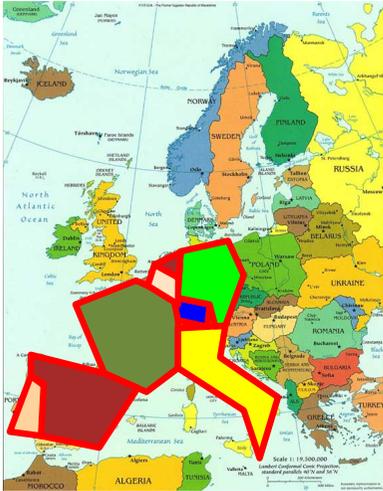


géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)

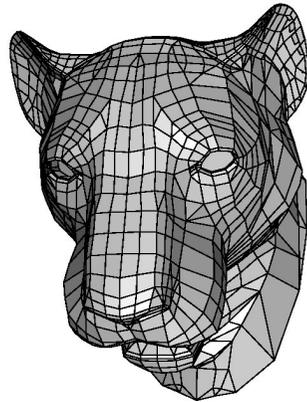


carte combinatoire
 \approx

structure formée de **sommets**,
d'**arêtes** et de **faces** dont le
recollement forme une surface



carte géographique



maillage surfacique



arbre en automne

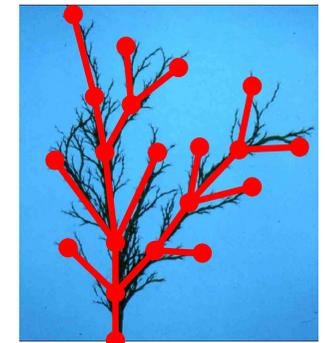
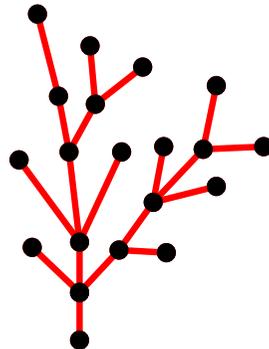


arbre généalogique

arbre combinatoire

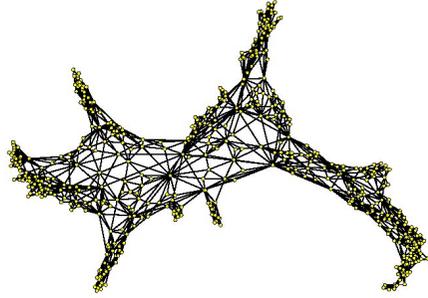
\approx

structure formée de **sommets**
liés par des **arêtes** formants
des branches indépendantes

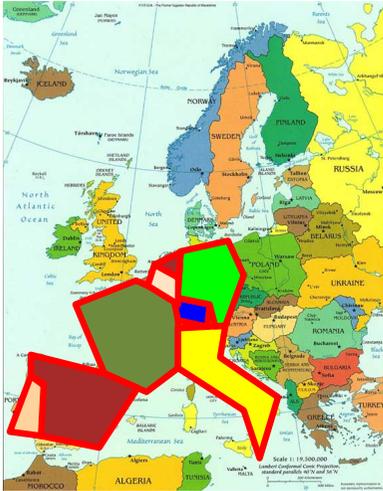
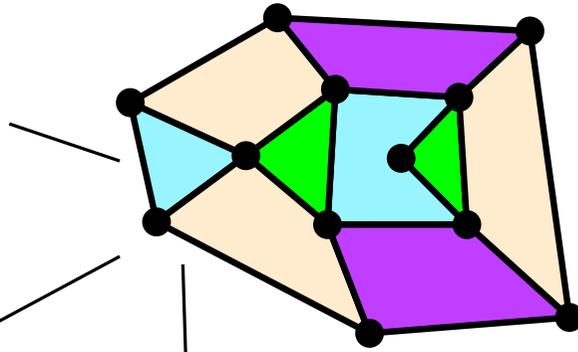


arbre de synthèse

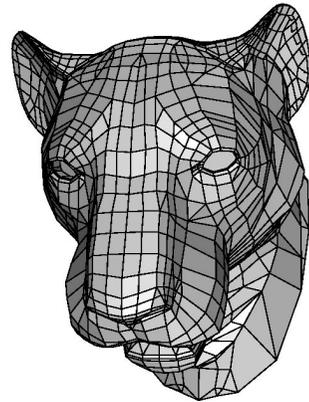
Les cartes, comme abstraction des surfaces



géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)

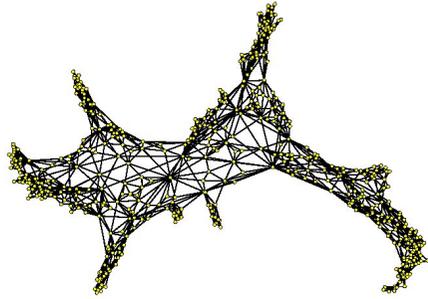


carte géographique

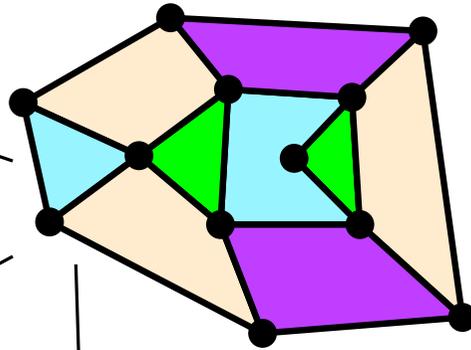


maillage surfacique

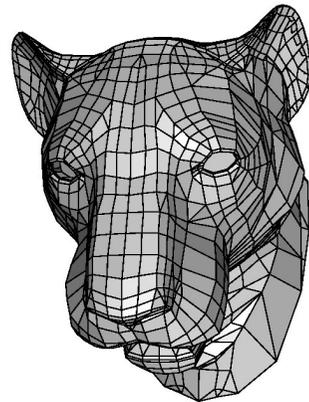
Les cartes, comme abstraction des surfaces



géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)



carte géographique

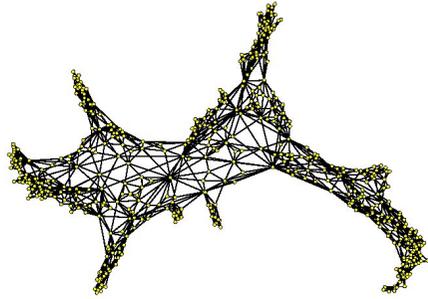


maillage surfacique

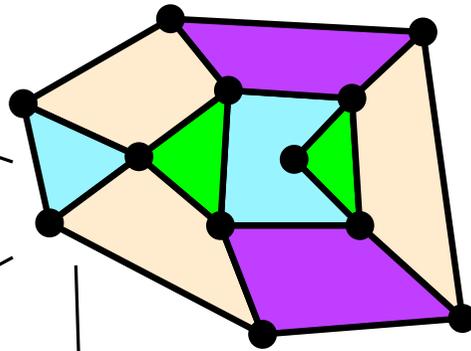
Algorithmique/théorie des graphes

pour utiliser la planarité,
travailler sur une carte plane !
exemple: théorème des 4 couleurs

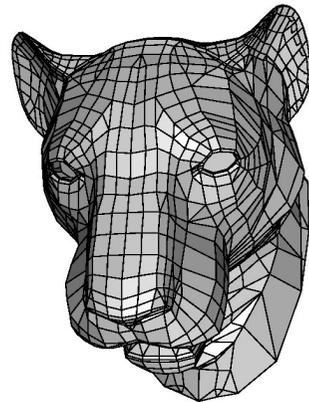
Les cartes, comme abstraction des surfaces



géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)



carte géographique



maillage surfacique

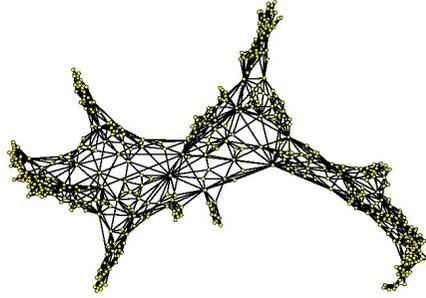
Géométrie algorithmique

séparation de la combinatoire
(incidences entre faces, sommets)
et de la géométrie (coordonnées)
⇒ structures de données

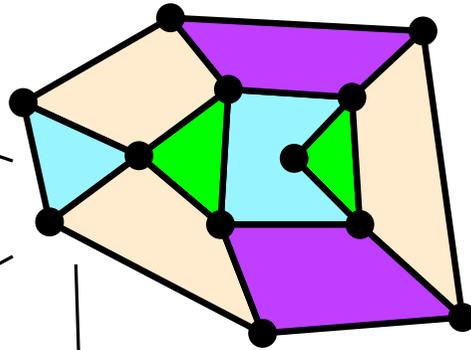
Algorithmique/théorie des graphes

pour utiliser la planarité,
travailler sur une carte plane !
exemple: théorème des 4 couleurs

Les cartes, comme abstraction des surfaces

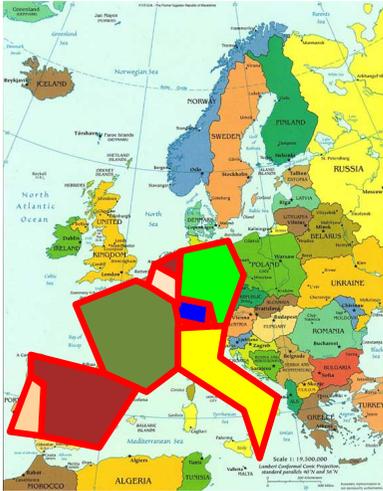


géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)

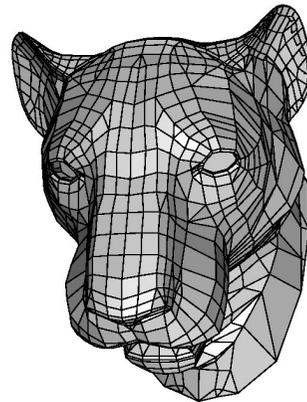


Physique statistique

un modèle classique de
surface aléatoire discrétisée



carte géographique



maillage surfacique

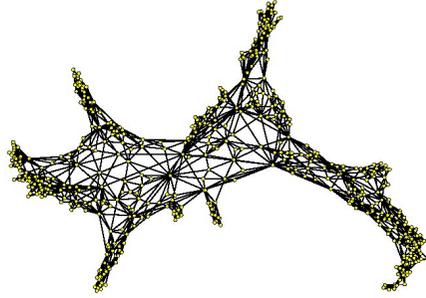
Géométrie algorithmique

séparation de la combinatoire
(incidences entre faces, sommets)
et de la géométrie (coordonnées)
⇒ structures de données

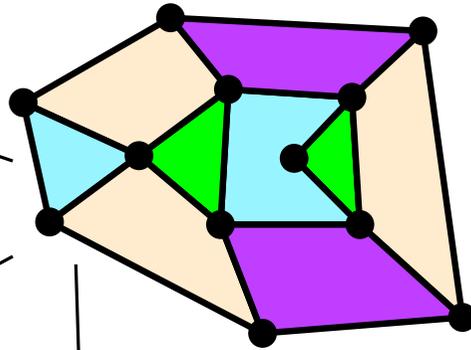
Algorithmique/théorie des graphes

pour utiliser la planarité,
travailler sur une carte plane !
exemple: théorème des 4 couleurs

Les cartes, comme abstraction des surfaces

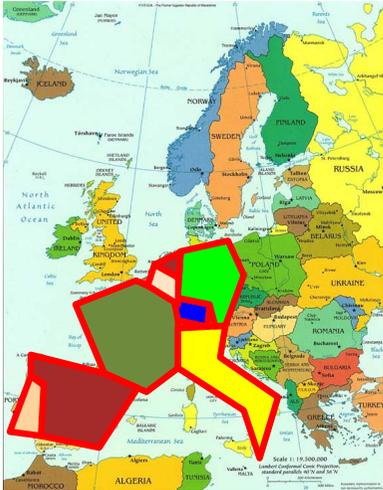


géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)

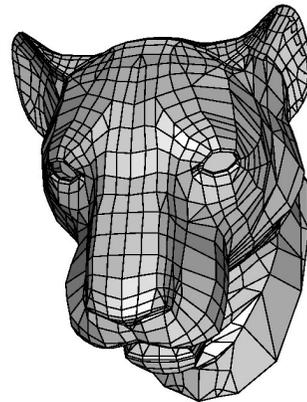


Physique statistique

un modèle classique de
surface aléatoire discrétisée



carte géographique



maillage surfacique

Géométrie algorithmique

séparation de la combinatoire
(incidences entre faces, sommets)
et de la géométrie (coordonnées)
⇒ structures de données

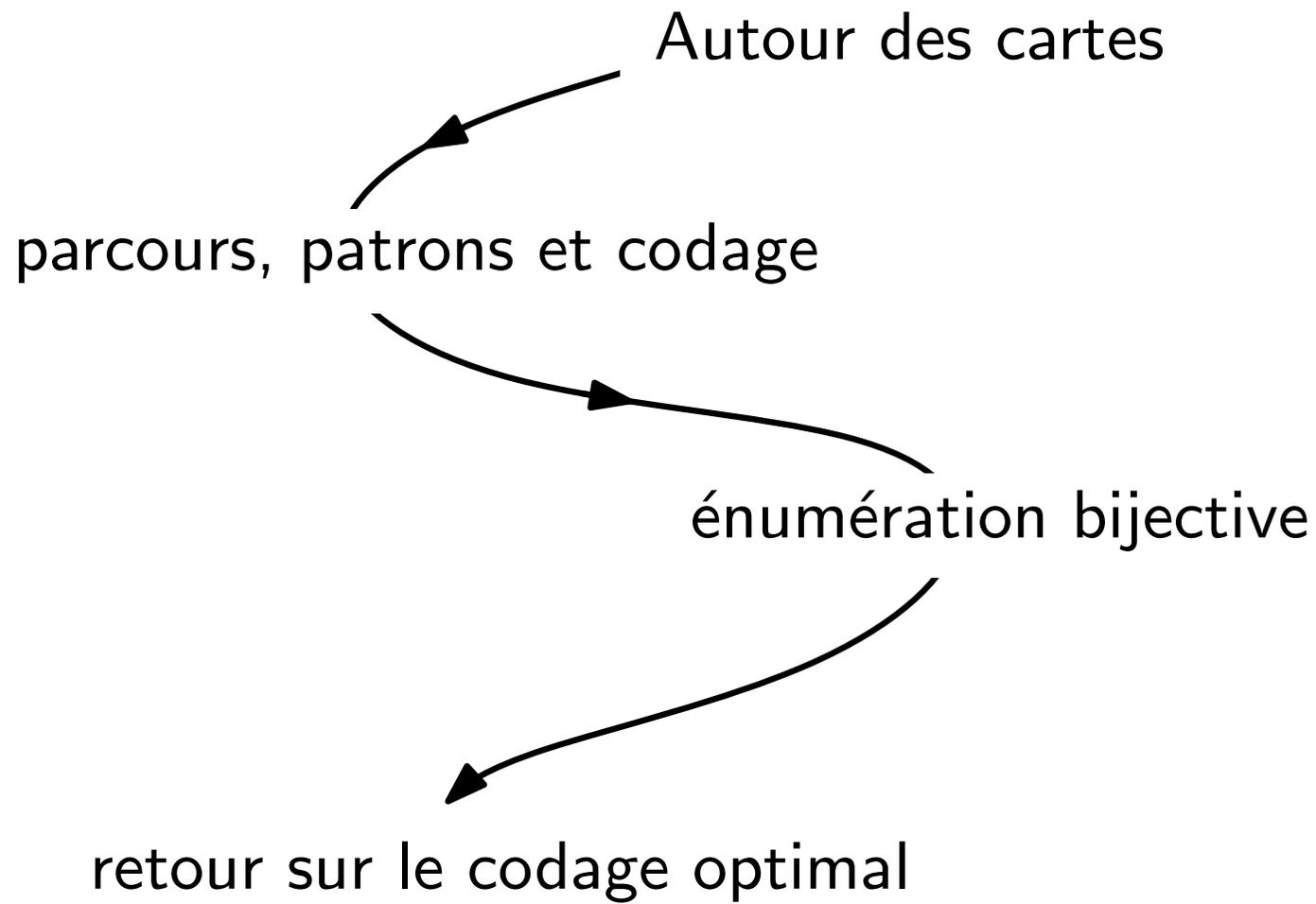
Algorithmique/théorie des graphes

pour utiliser la planarité,
travailler sur une carte plane !
exemple: théorème des 4 couleurs

En remontant dans le temps...

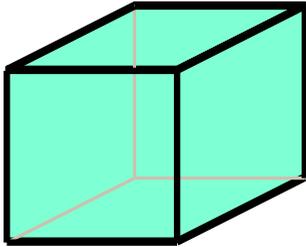
Topologie des surfaces

Classification des polyèdres



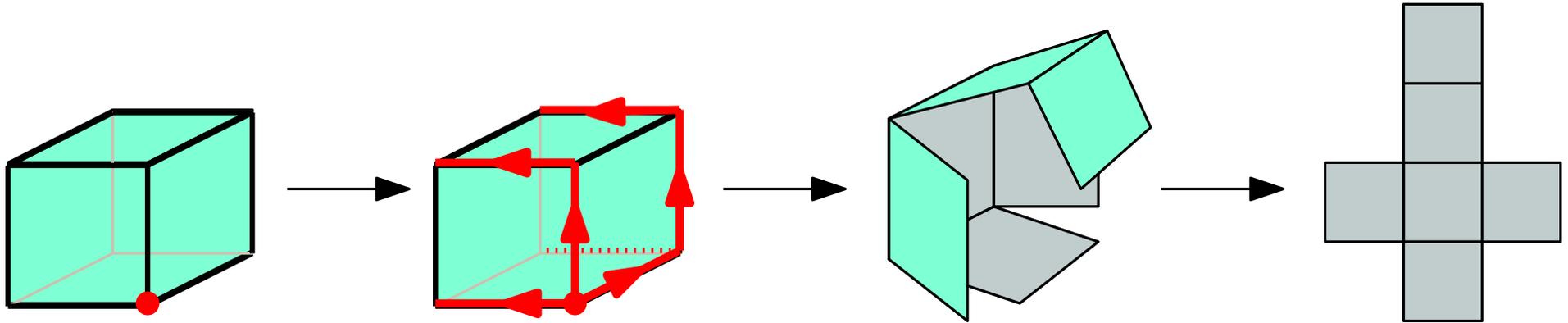
Deux choses que vous savez peut-être déjà des cartes...

sur la surface du cube: la carte la plus connue...



Deux choses que vous savez peut-être déjà des cartes...

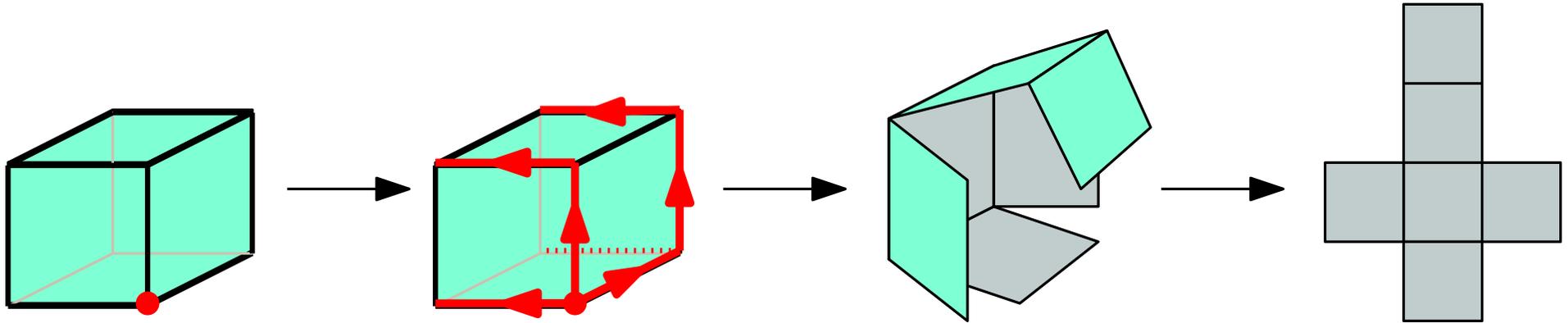
sur la surface du cube: la carte la plus connue...



Parcourir les arêtes pour former un arbre joignant tous les sommets...
et découper la surface pour obtenir un **patron** (Dürer, 1525)

Deux choses que vous savez peut-être déjà des cartes...

sur la surface du cube: la carte la plus connue...



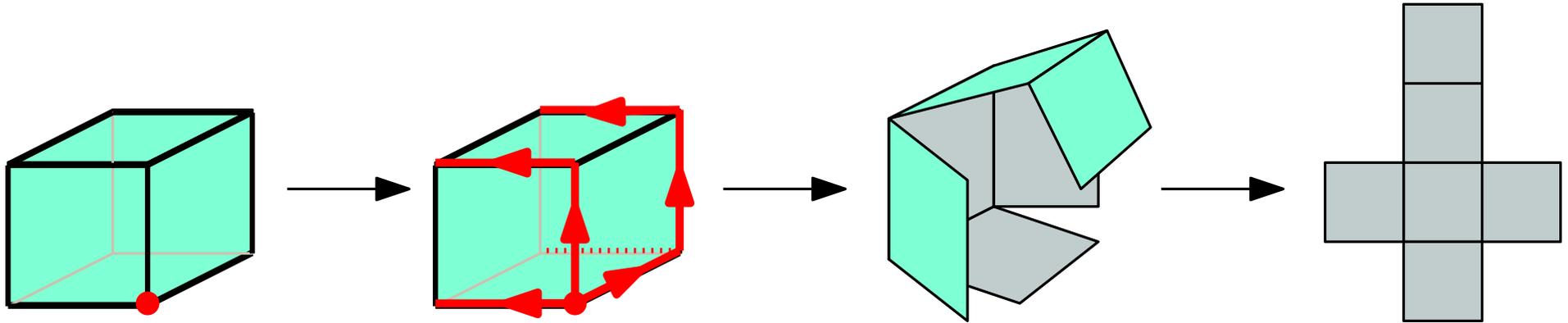
Parcourir les arêtes pour former un arbre joignant tous les sommets...
et découper la surface pour obtenir un **patron** (Dürer, 1525)

l'arbre de découpage joint tous les sommets

s sommets $\Rightarrow s - 1$ arêtes découpées

Deux choses que vous savez peut-être déjà des cartes...

sur la surface du cube: la carte la plus connue...



Parcourir les arêtes pour former un arbre joignant tous les sommets...
et découper la surface pour obtenir un **patron** (Dürer, 1525)

l'arbre de découpage joint tous les sommets

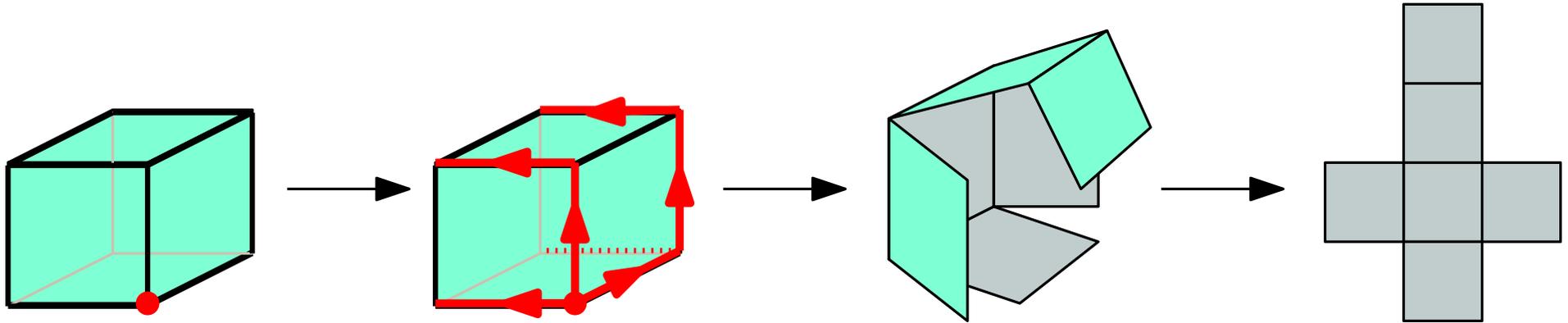
s sommets $\Rightarrow s - 1$ arêtes découpées

les faces du patron forment un arbre de polygones collés par des côtés

f faces $\Rightarrow f - 1$ arêtes internes au patron

Deux choses que vous savez peut-être déjà des cartes...

sur la surface du cube: la carte la plus connue...



Parcourir les arêtes pour former un arbre joignant tous les sommets...
et découper la surface pour obtenir un **patron** (Dürer, 1525)

l'arbre de découpage joint tous les sommets

s sommets $\Rightarrow s - 1$ arêtes découpées

les faces du patron forment un arbre de polygones collés par des côtés

f faces $\Rightarrow f - 1$ arêtes internes au patron

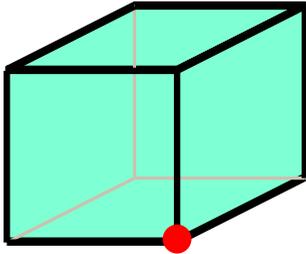
Thm. Pour toute carte planaire: $s + f = a + 2$ (Euler, 1752)

Algorithmes de parcours et patrons

Parcours d'une carte et découpage de surface

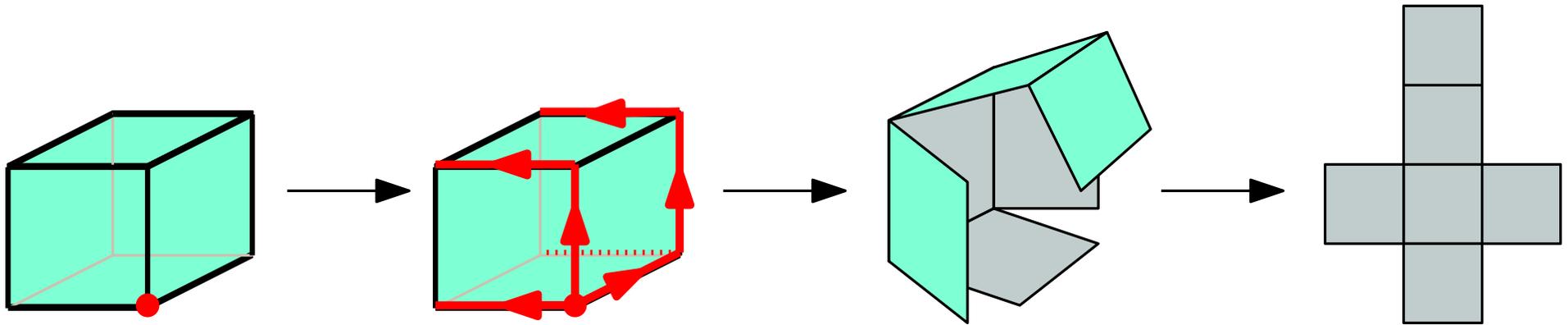
Algorithmes de parcours et patrons

Parcours d'une carte et découpage de surface



Algorithmes de parcours et patrons

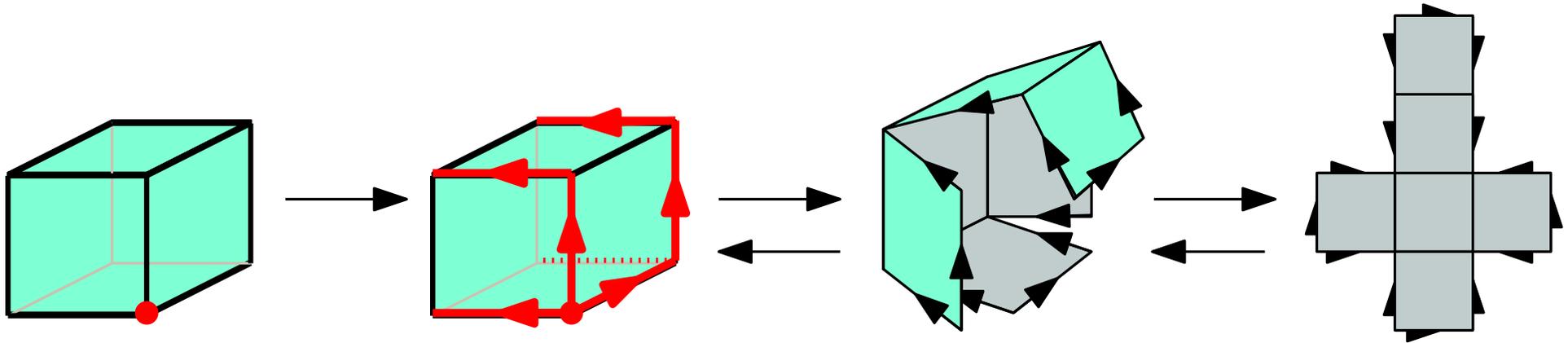
Parcours d'une carte et découpage de surface



Parcours + découpage \Rightarrow un "patron" de la carte

Algorithmes de parcours et patrons

Parcours d'une carte et découpage de surface



Parcours + découpage \Rightarrow un "patron" de la carte

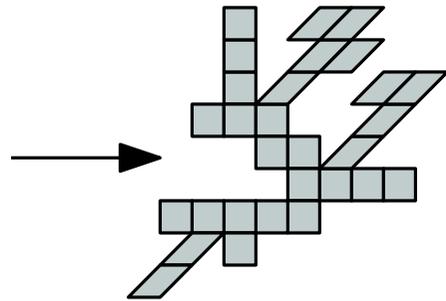
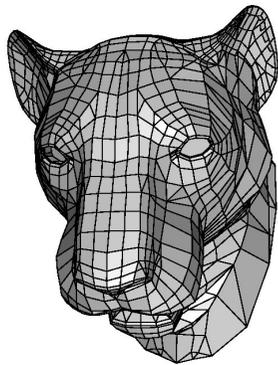
pour reconstruire la surface, il faut et il suffit du patron avec l'orientation des coupures: recoller les côtés tête-bêches et itérer

En d'autres termes, le patron orienté encode la carte de départ.

Algorithmes de parcours et patrons

Encoder des cartes...

≈ compresser des maillages.



01000111010010001100...

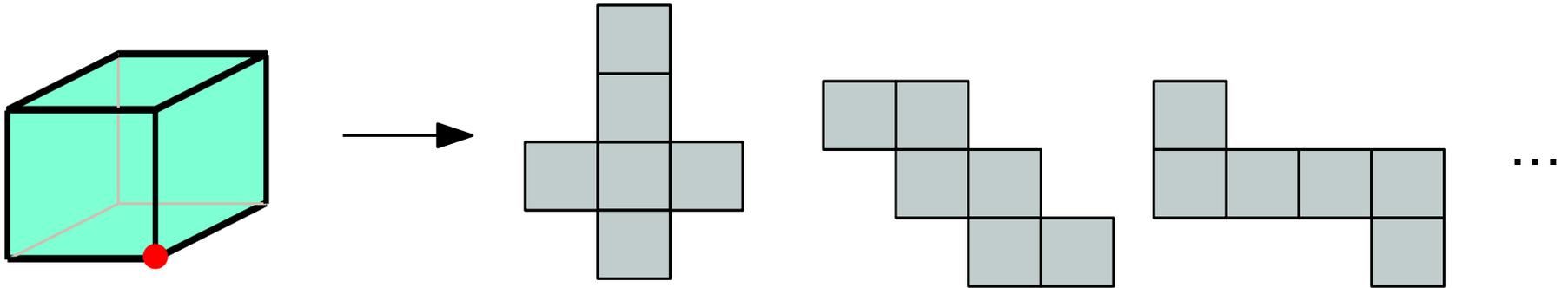
Approche popularisée par les travaux de Rossignac (90's) avec son codeur *Edgebreaker*, qui a divisé par 10 la taille des représentations utilisées

Idée: patron = arbre de polygones

et les arbres admettent des codes très compacts

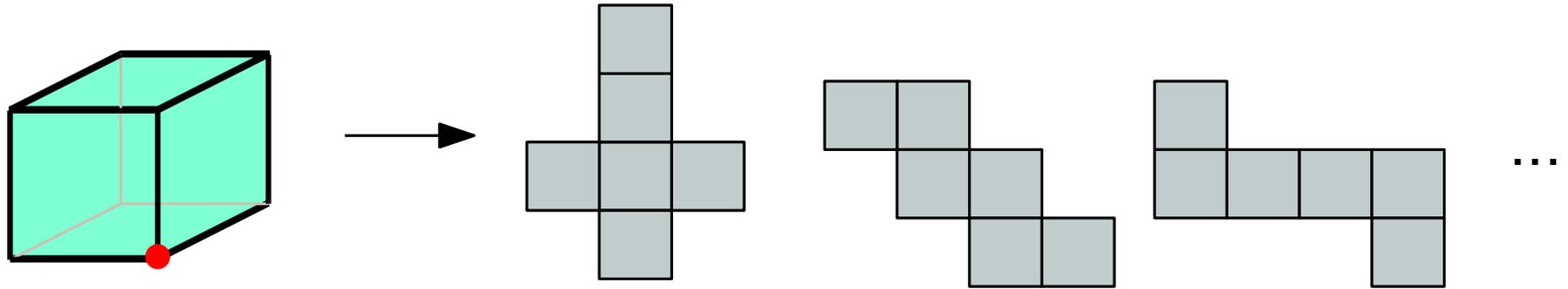
Algorithmes de parcours et patrons

À une carte sont associés plusieurs patrons...

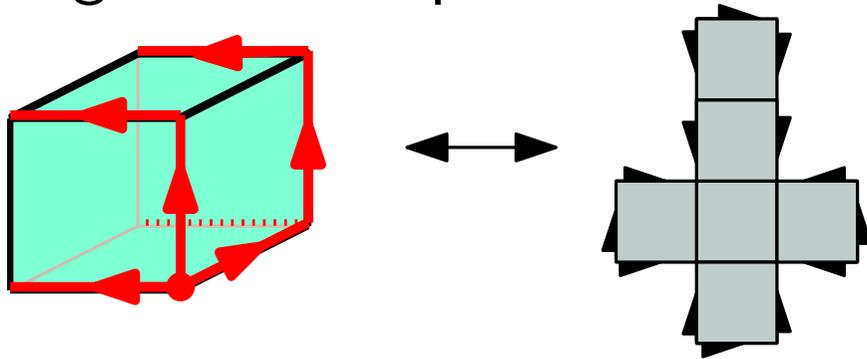


Algorithmes de parcours et patrons

À une carte sont associés plusieurs patrons...

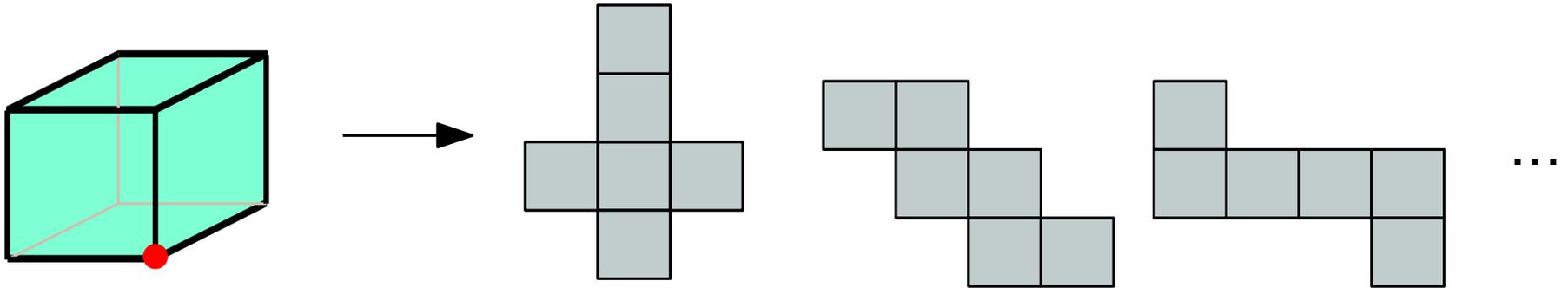


Mais un algorithme de parcours donné associe un patron à chaque carte

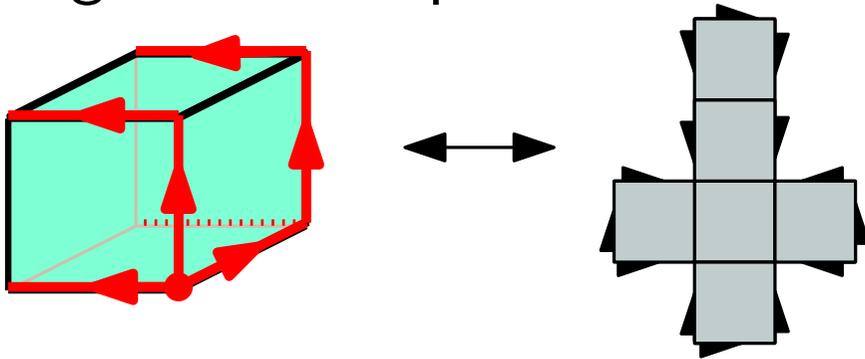


Algorithmes de parcours et patrons

À une carte sont associés plusieurs patrons...



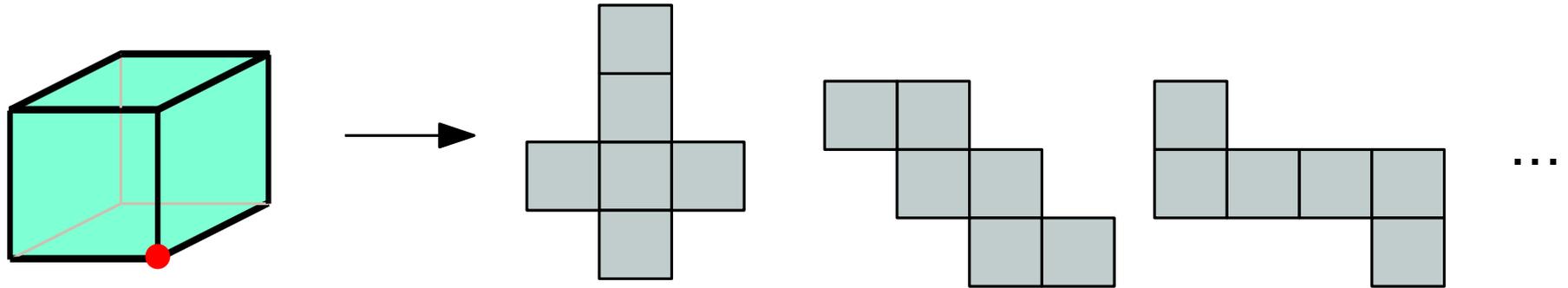
Mais un algorithme de parcours donné associe un patron à chaque carte



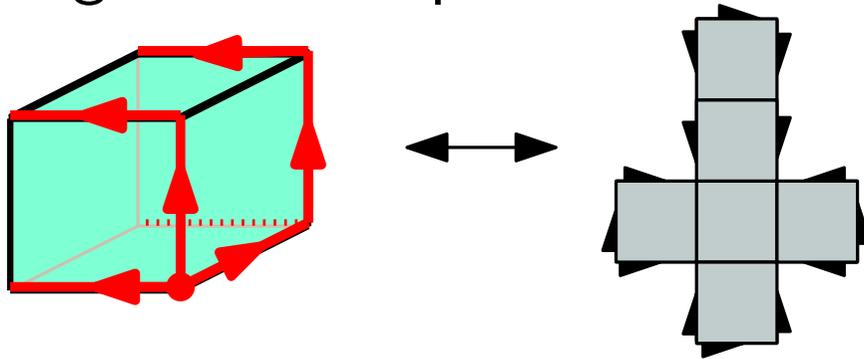
à chaque algorithme de parcours est associé un ensemble de **patrons valides**

Algorithmes de parcours et patrons

À une carte sont associés plusieurs patrons...



Mais un algorithme de parcours donné associe un patron à chaque carte



à chaque algorithme de parcours est associé un ensemble de **patrons valides**

La recherche des parcours donnant les patrons les plus faciles à coder conduit à une course au code le plus compact au début des années 2000...

Algorithmes de parcours et patrons

L'**entropie** d'une classe de structure \mathcal{C} est $||\mathcal{C}_n|| = \log_2(1 + |\mathcal{C}_n|)$.
où $\mathcal{C}_n = \{ \text{objets de taille } n \text{ dans } \mathcal{C} \}$

Lemme. Tout codage pour les objets de \mathcal{C}_n utilise au moins un mot de taille $||\mathcal{C}_n||$.

Un codage qui utilise asymptotiquement $||\mathcal{C}_n|| \cdot (1 + o(1))$ bits est dit **asymptotiquement optimal**.

Algorithmes de parcours et patrons

L'**entropie** d'une classe de structure \mathcal{C} est $||\mathcal{C}_n|| = \log_2(1 + |\mathcal{C}_n|)$.
où $\mathcal{C}_n = \{ \text{objets de taille } n \text{ dans } \mathcal{C} \}$

Lemme. Tout codage pour les objets de \mathcal{C}_n utilise au moins un mot de taille $||\mathcal{C}_n||$.

Un codage qui utilise asymptotiquement $||\mathcal{C}_n|| \cdot (1 + o(1))$ bits est dit **asymptotiquement optimal**.

On a lié le problème du codage optimal à un problème d'énumération:

a priori l'énumération donne la borne inférieure...

Algorithmes de parcours et patrons

L'**entropie** d'une classe de structure \mathcal{C} est $||\mathcal{C}_n|| = \log_2(1 + |\mathcal{C}_n|)$.
où $\mathcal{C}_n = \{ \text{objets de taille } n \text{ dans } \mathcal{C} \}$

Lemme. Tout codage pour les objets de \mathcal{C}_n utilise au moins un mot de taille $||\mathcal{C}_n||$.

Un codage qui utilise asymptotiquement $||\mathcal{C}_n|| \cdot (1 + o(1))$ bits est dit **asymptotiquement optimal**.

On a lié le problème du codage optimal à un problème d'énumération:

a priori l'énumération donne la borne inférieure...

Mon propos est de montrer l'inverse:

bien savoir compter \Rightarrow codage compact

Algorithmes de parcours et patrons

L'**entropie** d'une classe de structure \mathcal{C} est $||\mathcal{C}_n|| = \log_2(1 + |\mathcal{C}_n|)$.
où $\mathcal{C}_n = \{ \text{objets de taille } n \text{ dans } \mathcal{C} \}$

Lemme. Tout codage pour les objets de \mathcal{C}_n utilise au moins un mot de taille $||\mathcal{C}_n||$.

Un codage qui utilise asymptotiquement $||\mathcal{C}_n|| \cdot (1 + o(1))$ bits est dit **asymptotiquement optimal**.

On a lié le problème du codage optimal à un problème d'énumération:

a priori l'énumération donne la borne inférieure...

Mon propos est de montrer l'inverse:

bien savoir compter \Rightarrow codage compact
└ ?

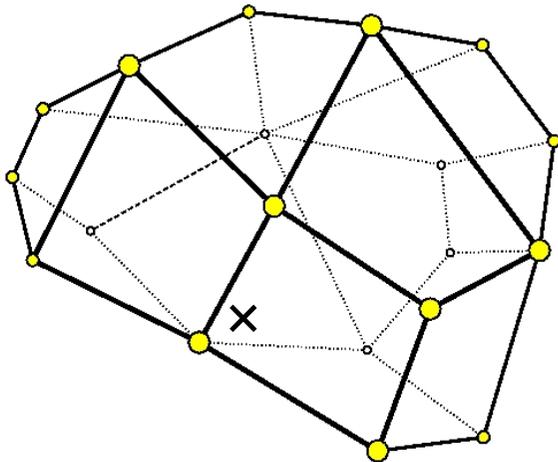
La formule de Tutte pour compter les cartes

W. T. Tutte (1964) obtient par décomposition/calcul que

le nombre Q_n de quadrangulations à n faces est $\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}$

↳ recollement de n carrés

avec $2n$ arêtes ($4n$ côtés)
et $n + 2$ sommets (Euler)
et un coin marqué



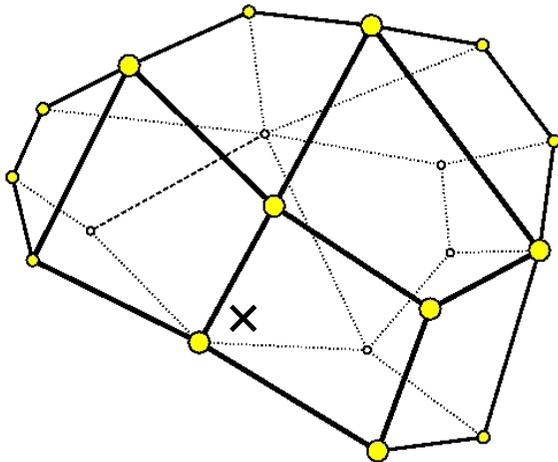
La formule de Tutte pour compter les cartes

W. T. Tutte (1964) obtient par décomposition/calcul que

le nombre Q_n de quadrangulations à n faces est $\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}$

↳ recollement de n carrés

avec $2n$ arêtes ($4n$ côtés)
et $n + 2$ sommets (Euler)
et un coin marqué



Énumération bijective: comprendre cette formule de manière constructive.

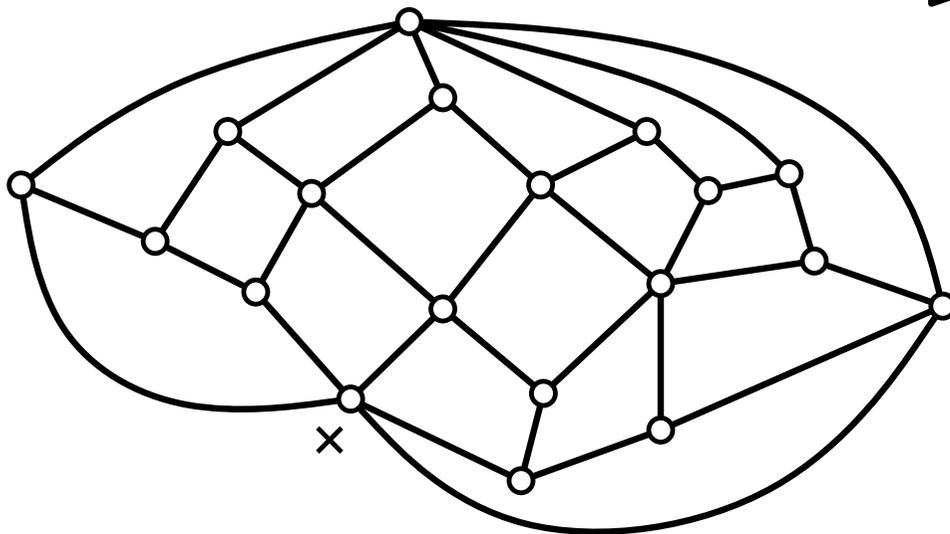
La formule de Tutte pour compter les cartes

W. T. Tutte (1964) obtient par décomposition/calcul que

le nombre Q_n de quadrangulations à n faces est $\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}$

↳ recollement de n carrés

avec $2n$ arêtes ($4n$ côtés)
et $n + 2$ sommets (Euler)
et un coin marqué



Énumération bijective: comprendre cette formule de manière constructive.

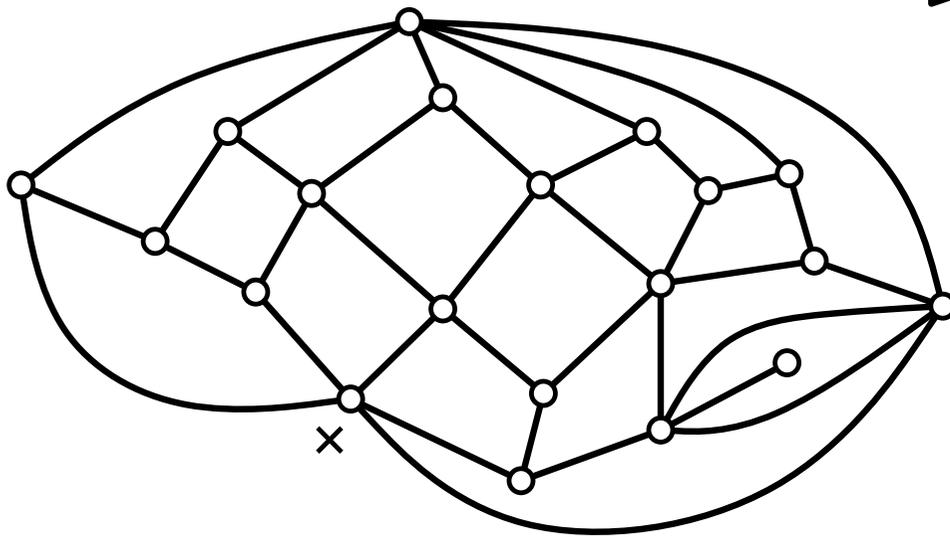
La formule de Tutte pour compter les cartes

W. T. Tutte (1964) obtient par décomposition/calcul que

le nombre Q_n de quadrangulations à n faces est $\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}$

↳ recollement de n carrés

avec $2n$ arêtes ($4n$ côtés)
et $n + 2$ sommets (Euler)
et un coin marqué



Énumération bijective: comprendre cette formule de manière constructive.

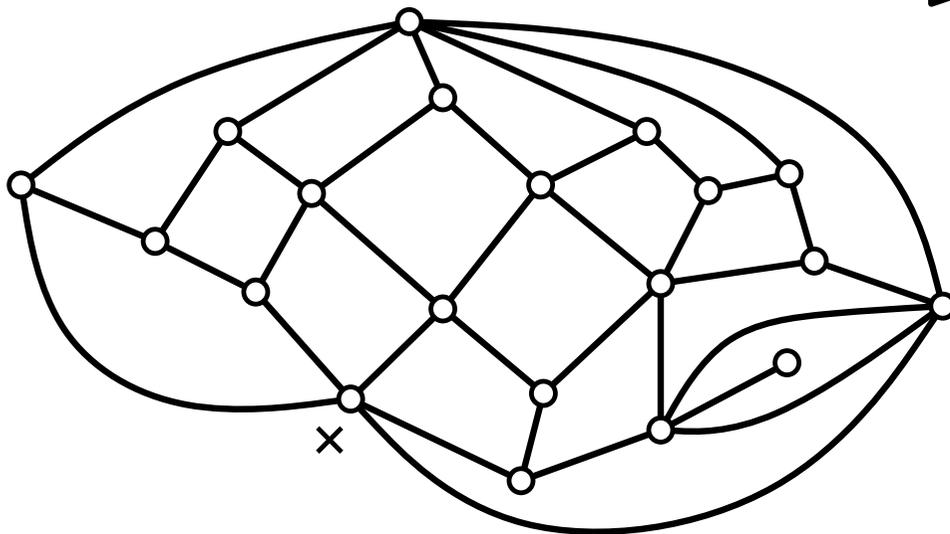
La formule de Tutte pour compter les cartes

W. T. Tutte (1964) obtient par décomposition/calcul que

le nombre Q_n de quadrangulations à n faces est $\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}$

↳ recollement de n carrés

avec $2n$ arêtes ($4n$ côtés)
et $n + 2$ sommets (Euler)
et un coin marqué



Énumération bijective: comprendre cette formule de manière constructive.

$$\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!} = \frac{2}{n+2} \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

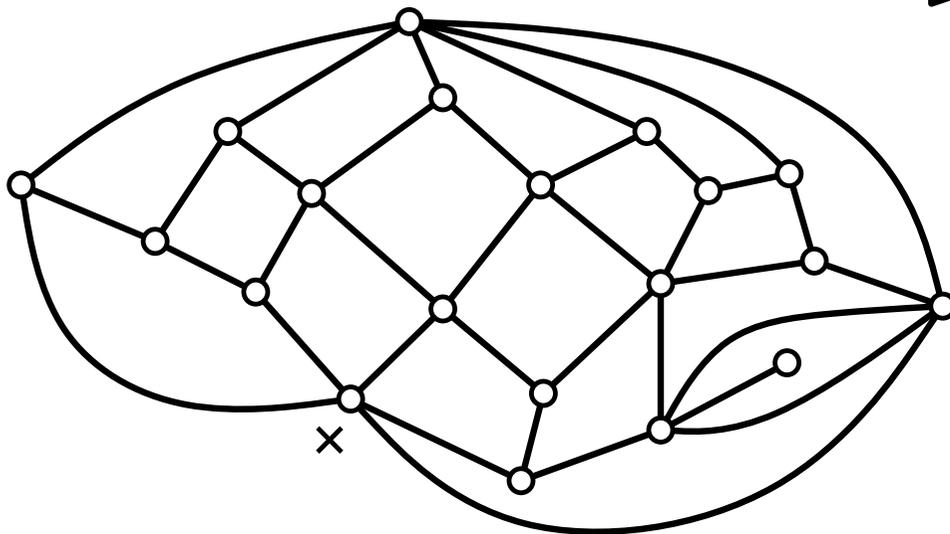
La formule de Tutte pour compter les cartes

W. T. Tutte (1964) obtient par décomposition/calcul que

le nombre Q_n de quadrangulations à n faces est $\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}$

↳ recollement de n carrés

avec $2n$ arêtes ($4n$ côtés)
et $n + 2$ sommets (Euler)
et un coin marqué

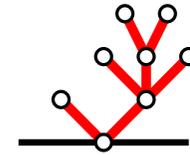


Énumération bijective: comprendre cette formule de manière constructive.

$$\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!} = \frac{2}{n+2} \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Le nombre d'arbres plans

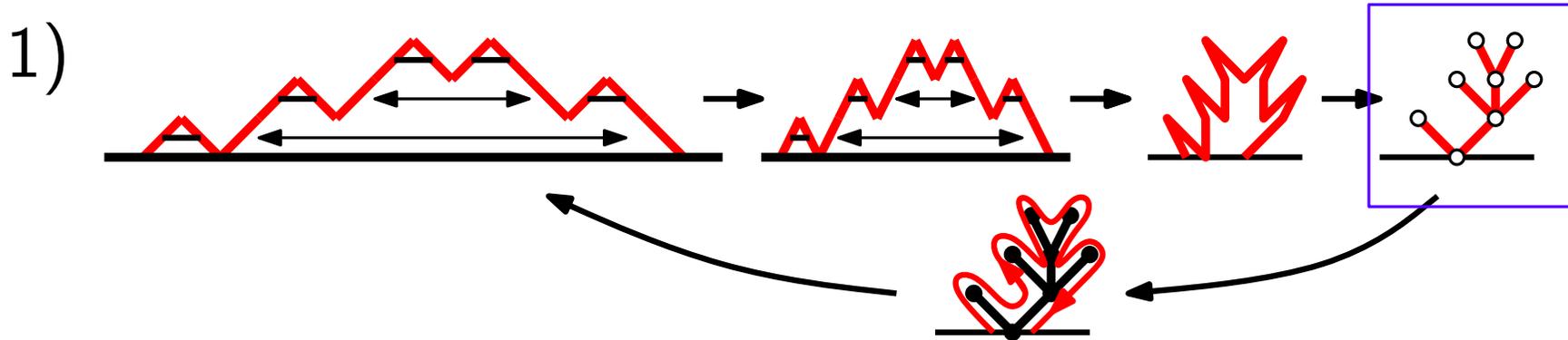
Le nombre C_n d'arbres plans à n arêtes est $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$



Le nombre d'arbres plans

Le nombre C_n d'arbres plans à n arêtes est $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

Preuve par le dessin (↳ Xavier Viennot) et les mots (↳ Robert Cori)

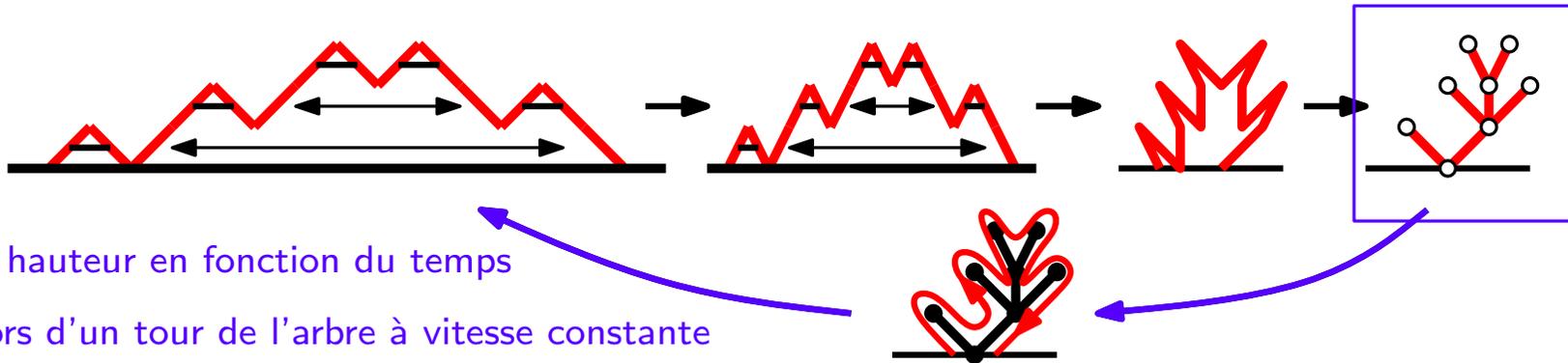


Le nombre d'arbres plans

Le nombre C_n d'arbres plans à n arêtes est $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

Preuve par le dessin (↳ Xavier Viennot) et les mots (↳ Robert Cori)

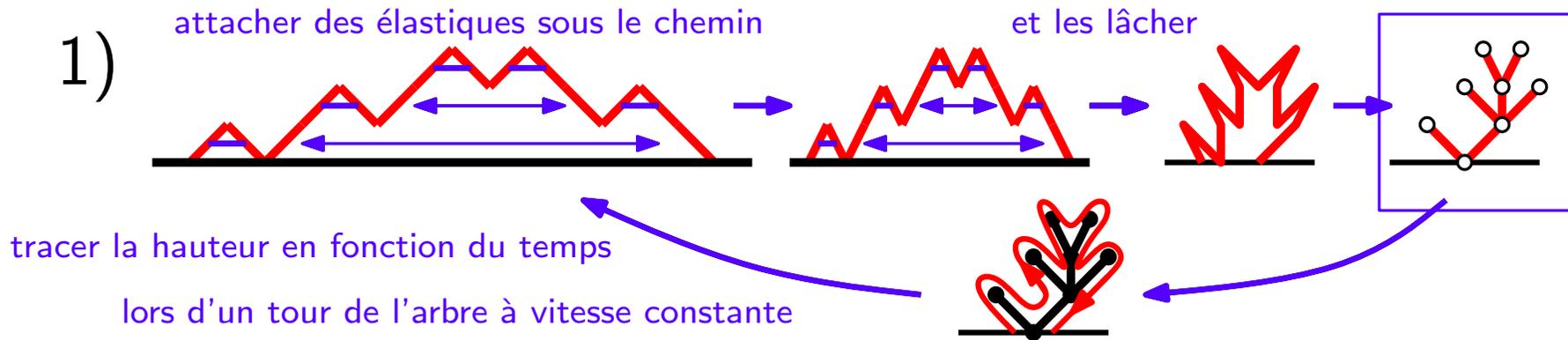
1)



Le nombre d'arbres plans

Le nombre C_n d'arbres plans à n arêtes est $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

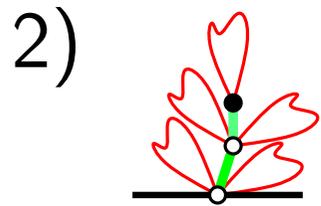
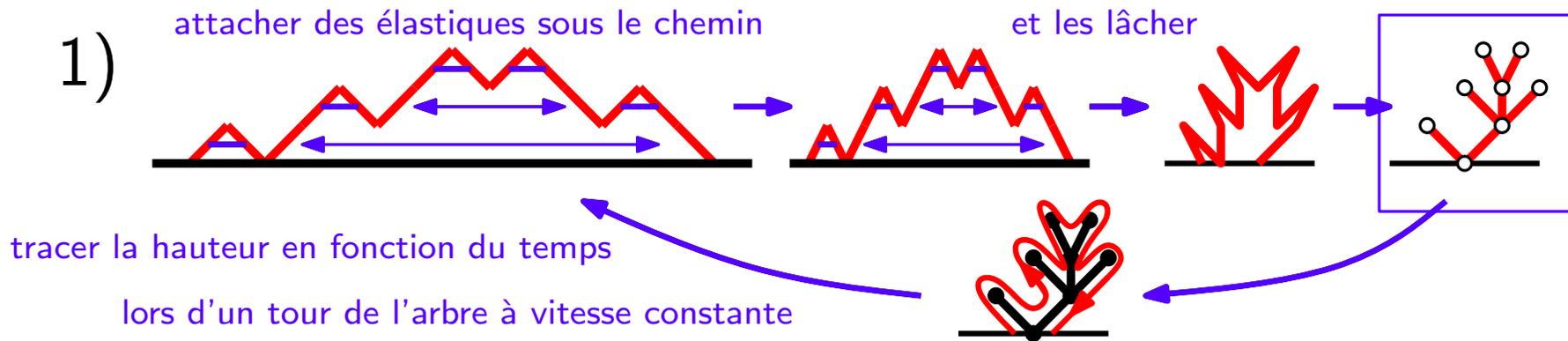
Preuve par le dessin (✦ Xavier Viennot) et les mots (✦ Robert Cori)



Le nombre d'arbres plans

Le nombre C_n d'arbres plans à n arêtes est $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

Preuve par le dessin (↳ Xavier Viennot) et les mots (↳ Robert Cori)

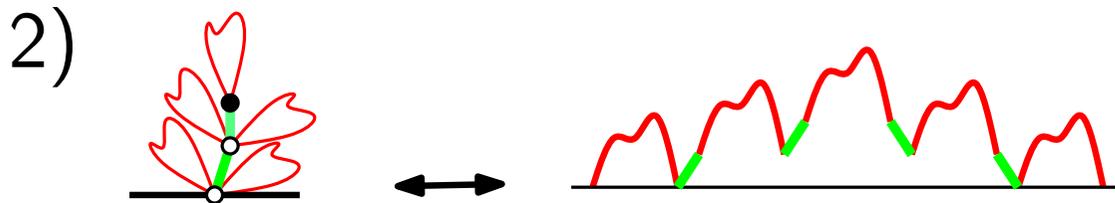
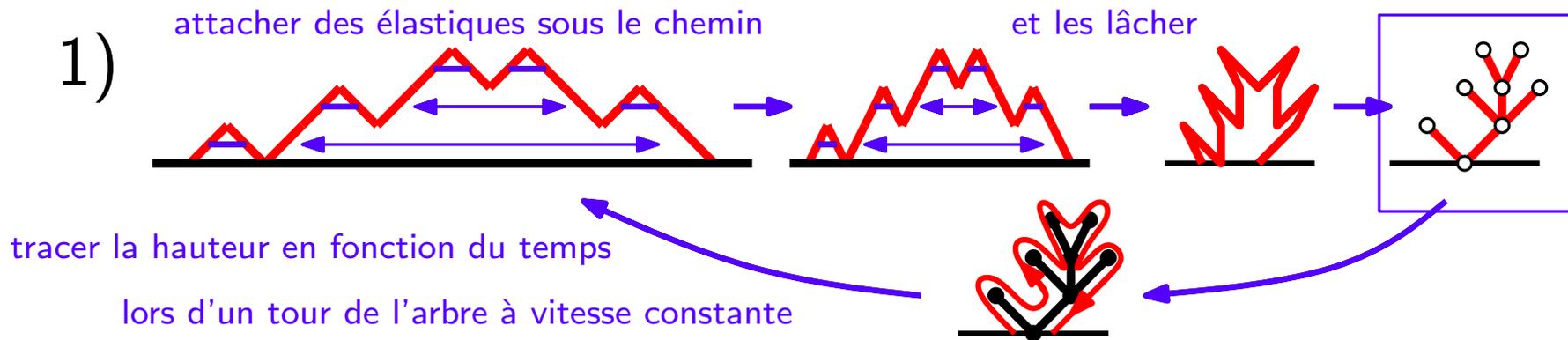


$$\# \left\{ \begin{array}{l} \text{arbre plan avec} \\ \text{sommet marqué} \end{array} \right\} = (n + 1) \cdot C_n$$

Le nombre d'arbres plans

Le nombre C_n d'arbres plans à n arêtes est $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

Preuve par le dessin (↳ Xavier Viennot) et les mots (↳ Robert Cori)

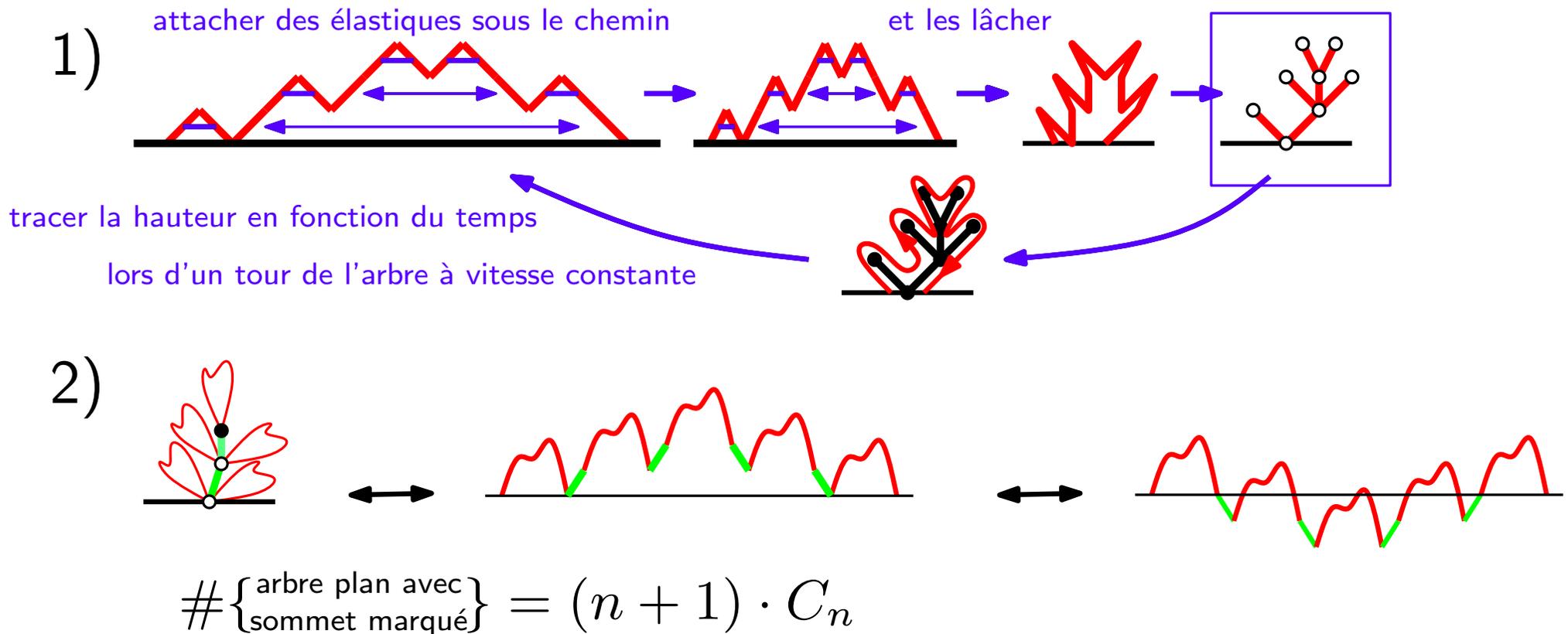


$$\# \left\{ \begin{array}{l} \text{arbre plan avec} \\ \text{sommet marqué} \end{array} \right\} = (n + 1) \cdot C_n$$

Le nombre d'arbres plans

Le nombre C_n d'arbres plans à n arêtes est $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

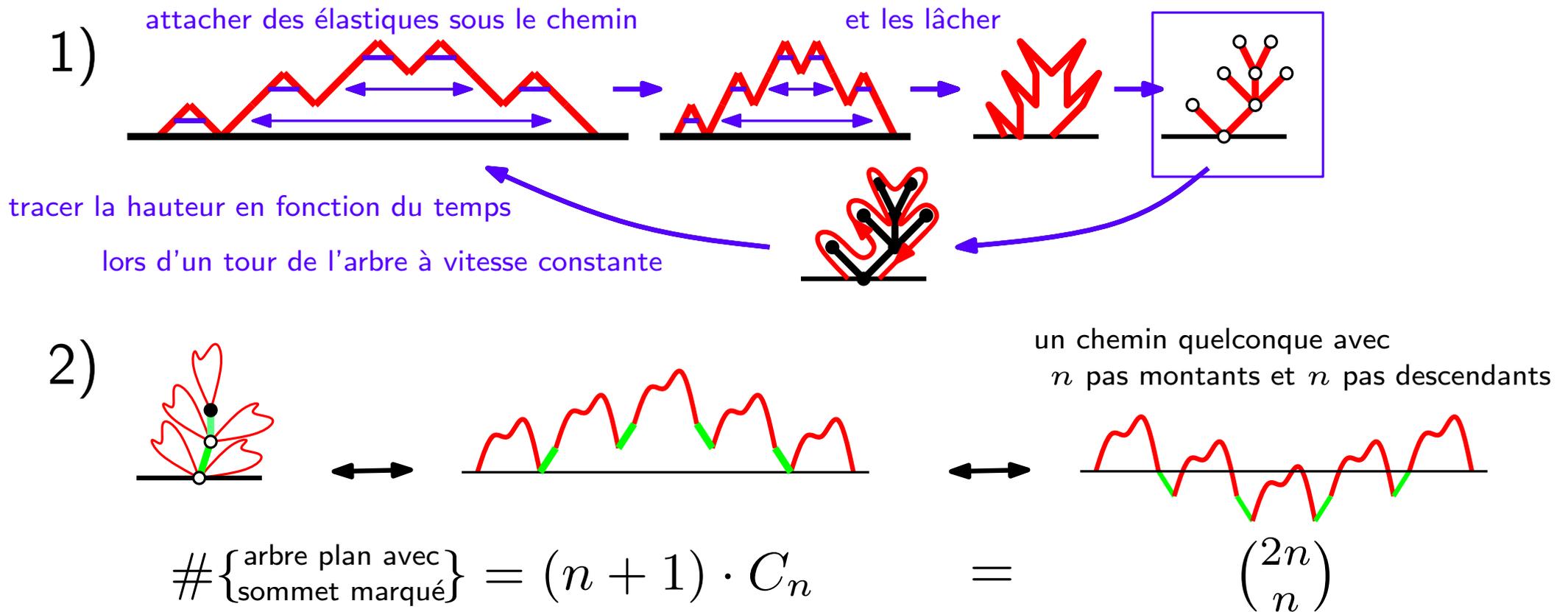
Preuve par le dessin (↳ Xavier Viennot) et les mots (↳ Robert Cori)



Le nombre d'arbres plans

Le nombre C_n d'arbres plans à n arêtes est $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

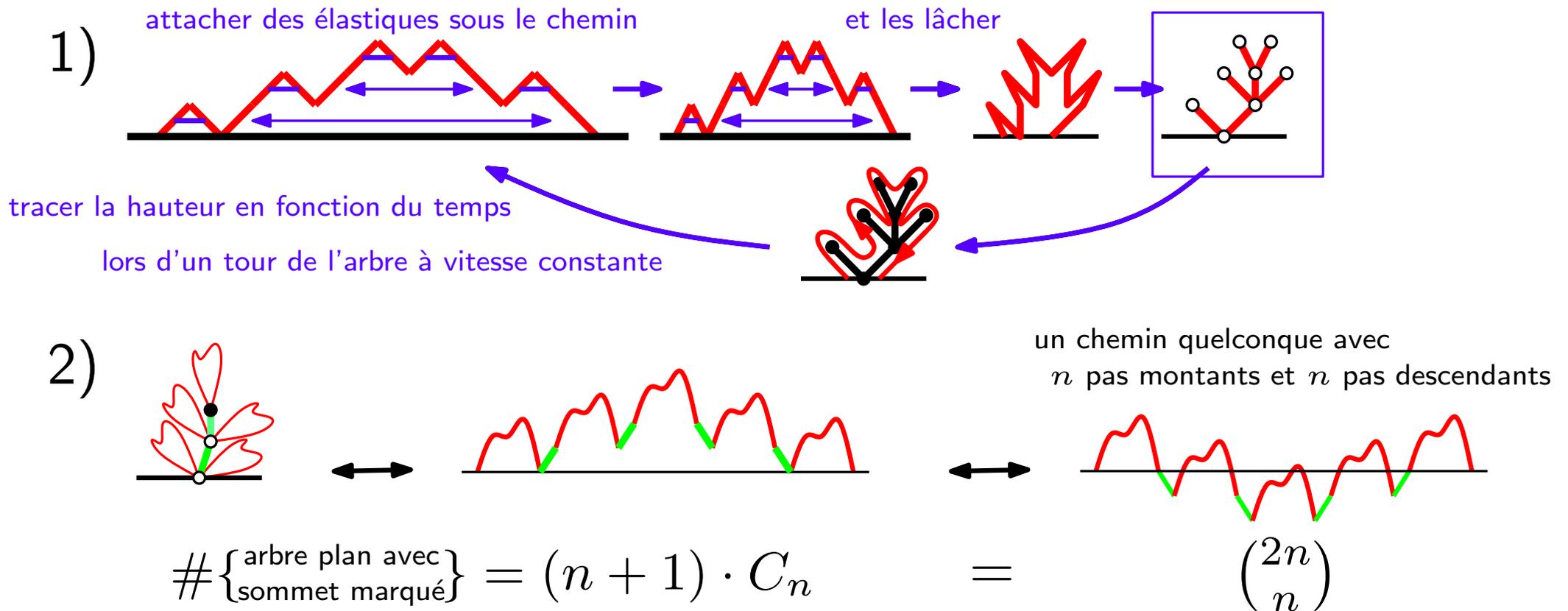
Preuve par le dessin (↳ Xavier Viennot) et les mots (↳ Robert Cori)



Le nombre d'arbres plans

Le nombre C_n d'arbres plans à n arêtes est $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

Preuve par le dessin (✦ Xavier Viennot) et les mots (✦ Robert Cori)

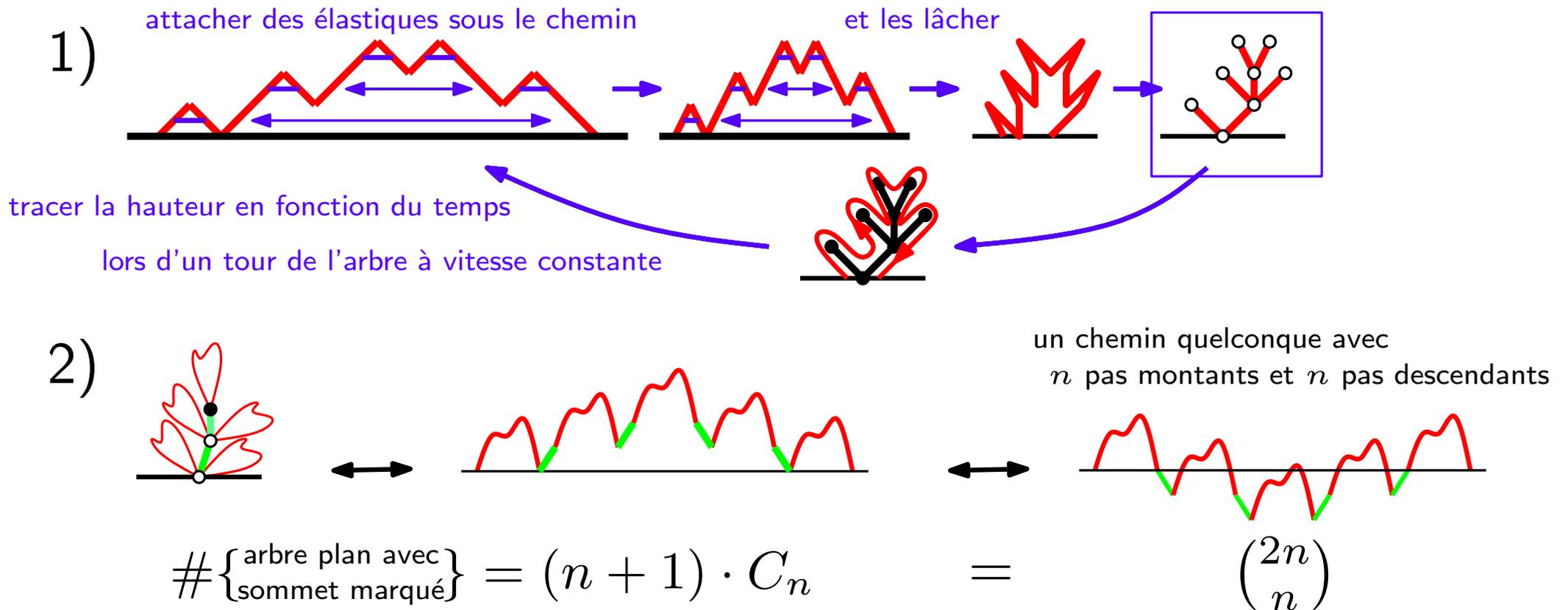


Le mot de contour (ou mot de parenthèse) est un code optimal de l'arbre:
Code de $2n$ bits alors que $\log_2 \|C_n\| = 2n + o(n)$

Le nombre d'arbres plans $\approx 4^n n^{-3/2}$

Le nombre C_n d'arbres plans à n arêtes est $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

Preuve par le dessin (Xavier Viennot) et les mots (Robert Cori)

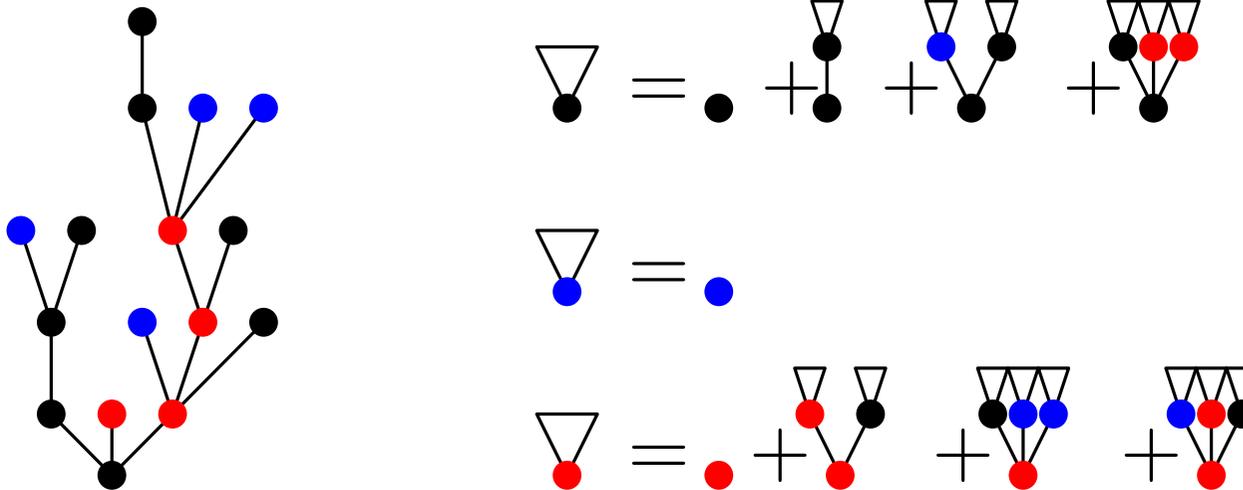


Le mot de contour (ou mot de parenthèse) est un code optimal de l'arbre:
Code de $2n$ bits alors que $\log_2 \|C_n\| = 2n + o(n)$

Arbres simples et langages algébriques (context-free)

Le cas des arbres plans illustre simplement un phénomène qui vaut plus généralement pour les structures algébriques.

Les familles simples d'arbres sont génériquement associées aux langages algébriques engendrés par des grammaires context-free non ambiguës.



La combinatoire analytique, telle que développée notamment par P. Flajolet, permet montrer l'universalité du comportement de l'entropie de ces classes: pas toujours des formules simples, mais calcul de ρ tq $T_n \approx \rho^n n^{-\alpha}$

⇒ Coder optimalement ces structures (en $n \log_2 \rho$ bits) par recodage bijectif.

Retour sur la formule de Tutte

La formule de Tutte (1964):

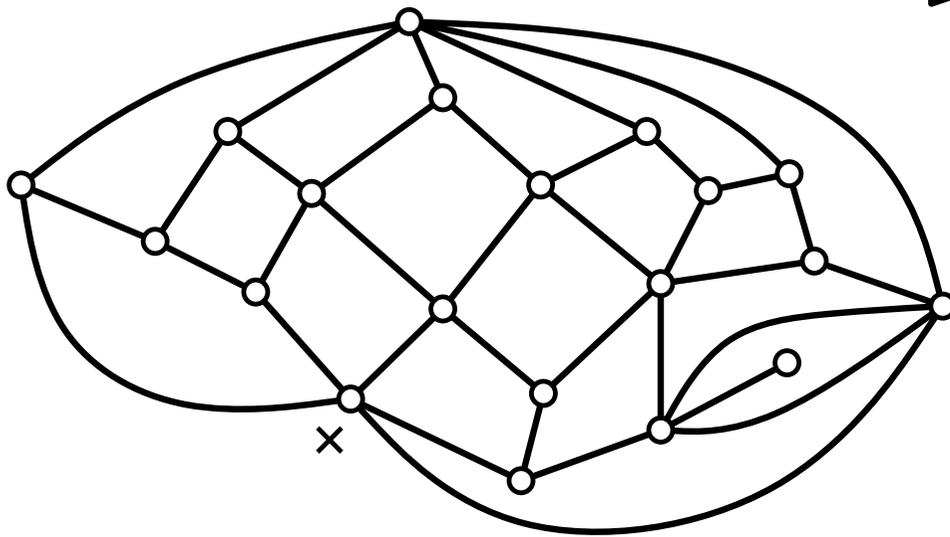
le nombre Q_n de quadrangulations à n faces est $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$

↳ recollement de n carrés

avec $2n$ arêtes ($4n$ côtés)

et $n + 2$ sommets (Euler)

et un coin marqué



Retour sur la formule de Tutte

La formule de Tutte (1964):

le nombre Q_n de quadrangulations à n faces est $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$

↳ recollement de n carrés

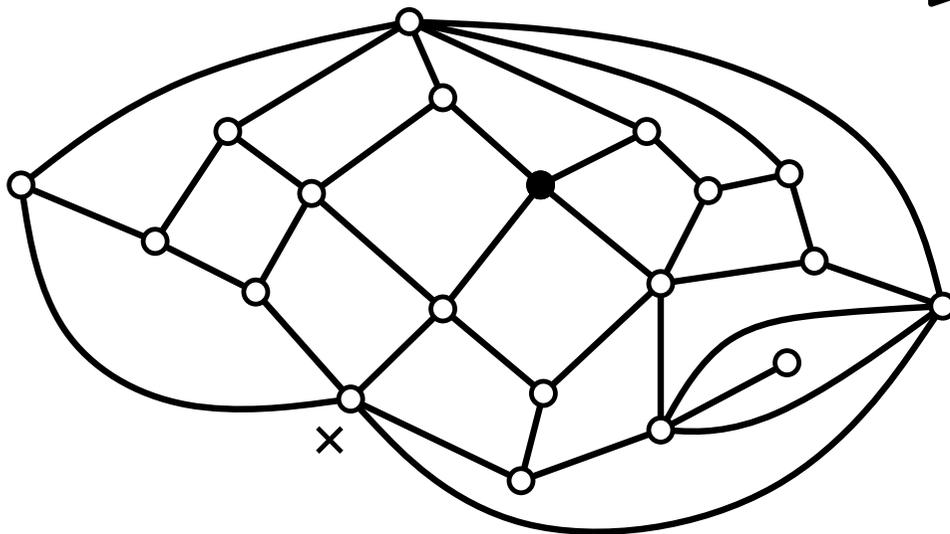
avec $2n$ arêtes ($4n$ côtés)

et $n + 2$ sommets (Euler)

et un coin marqué

Avec un sommet marqué:

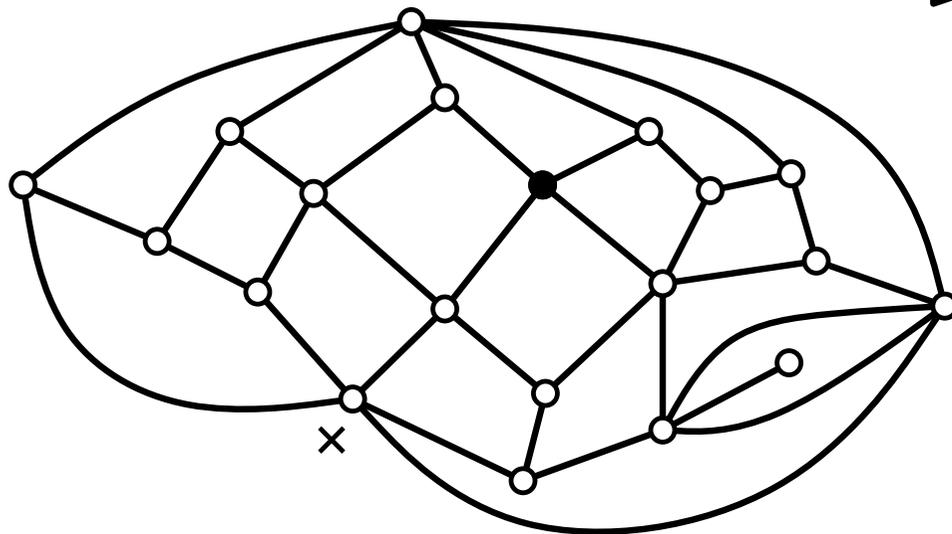
$$(n + 2) \cdot Q_n = 2 \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$



Retour sur la formule de Tutte

La formule de Tutte (1964):

le nombre Q_n de quadrangulations à n faces est $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$



↳ recollement de n carrés

avec $2n$ arêtes ($4n$ côtés)

et $n + 2$ sommets (Euler)

et un coin marqué

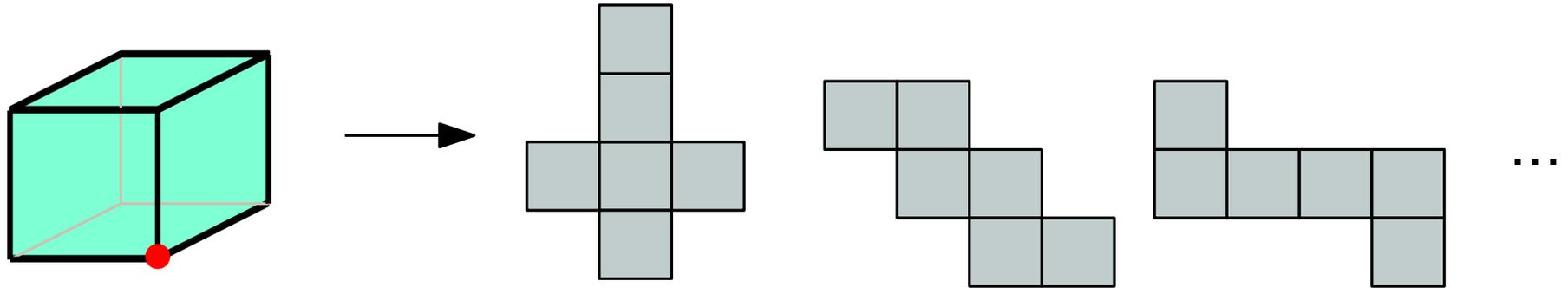
Avec un sommet marqué:

$$(n + 2) \cdot Q_n = 2 \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

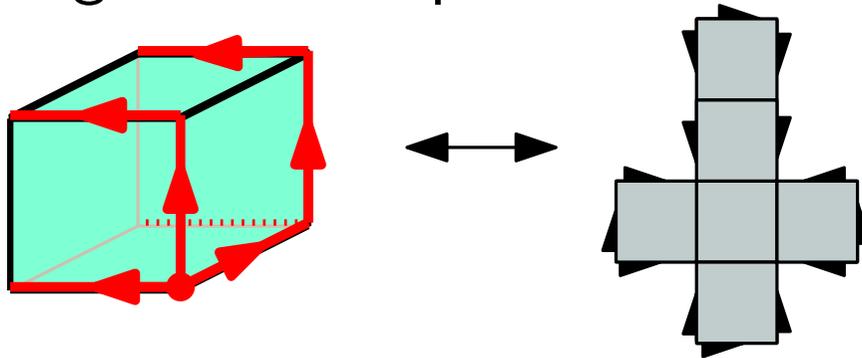
Alors que le nombre C_n d'arbres plans à n arêtes est $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

Les algorithmes de parcours

À une carte sont associés plusieurs patrons...



Mais un algorithme de parcours donné associe un patron à chaque carte

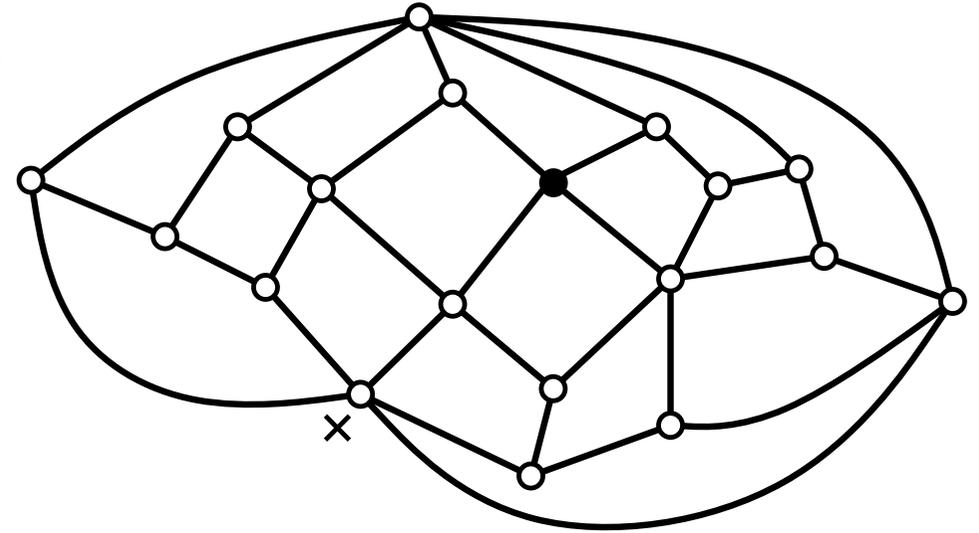


à chaque algorithme de parcours est associé un ensemble de **patrons valides**

La formule de Tutte suggère de chercher un algorithme qui admette un ensemble de patrons valides clairement comptés par $2 \cdot 3^n \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

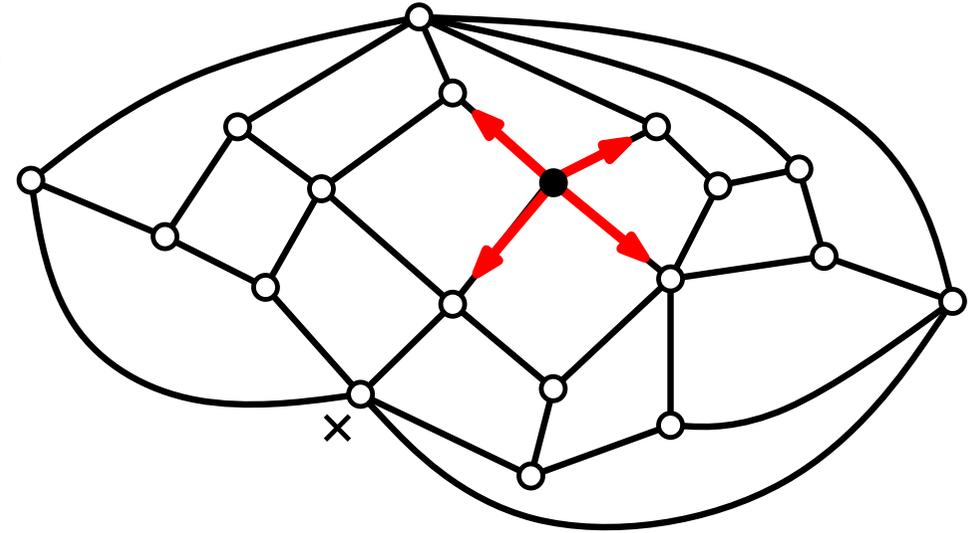
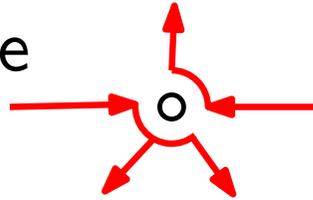
La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur



La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

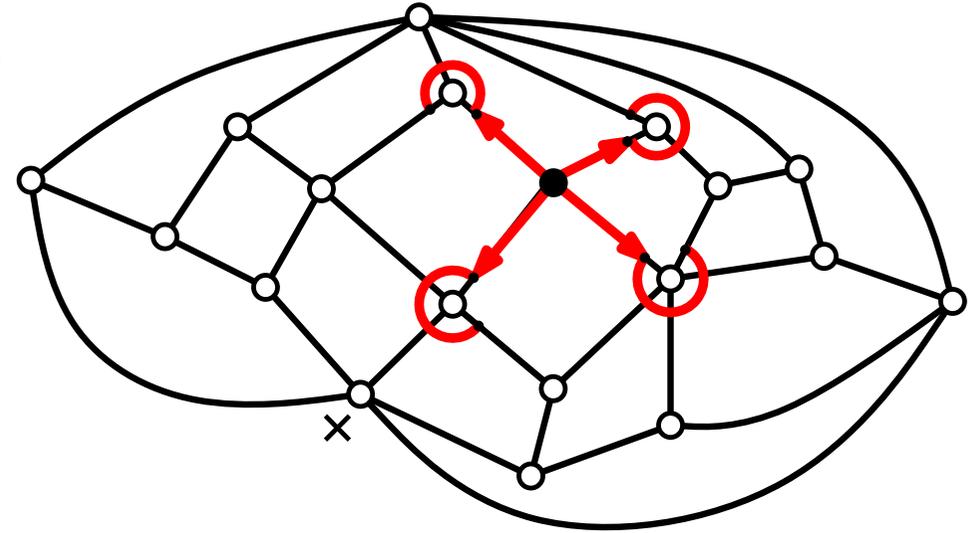
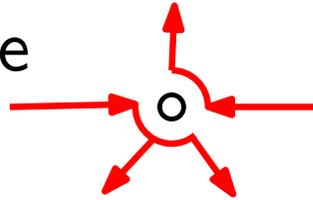
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

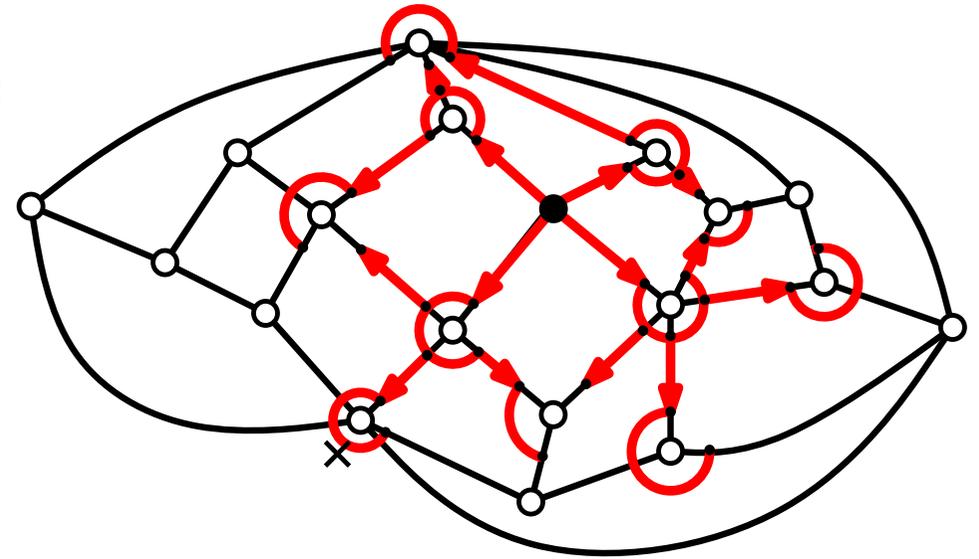
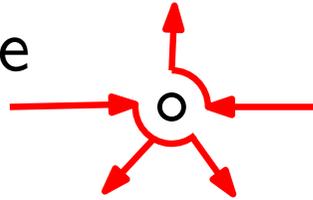
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

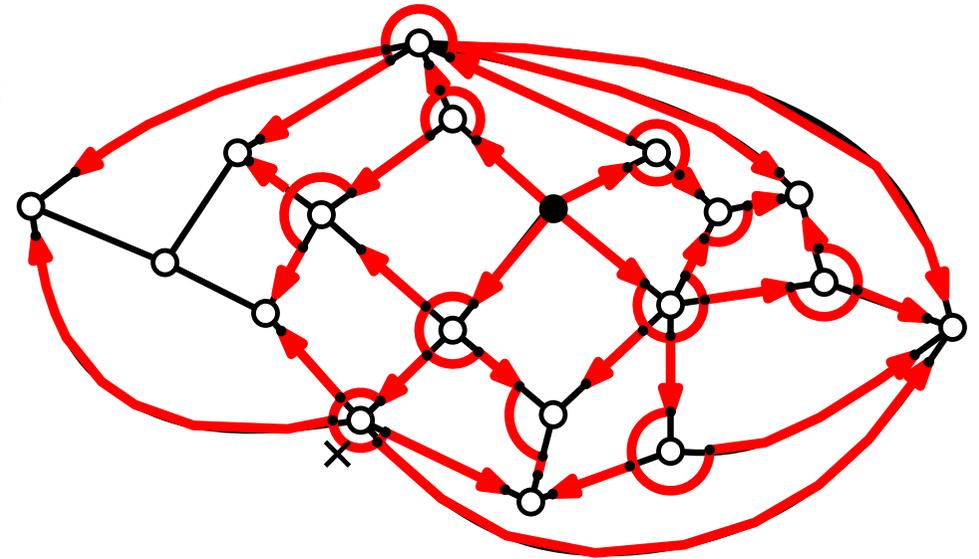
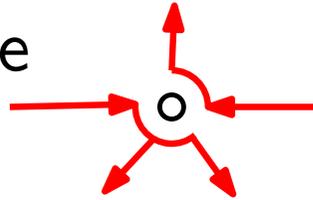
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

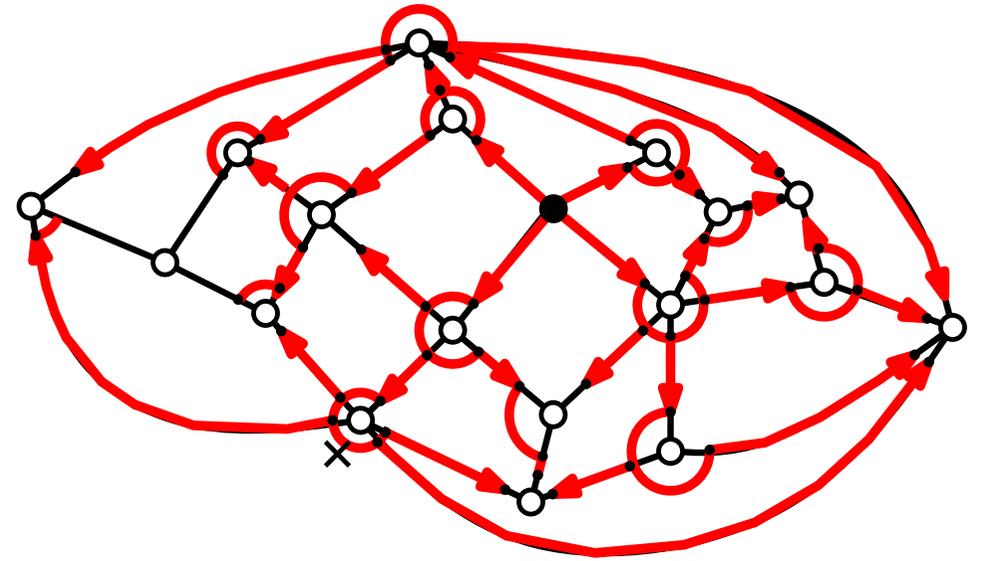
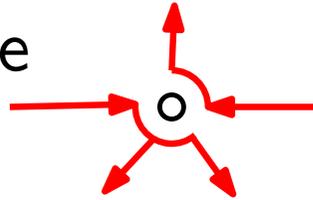
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

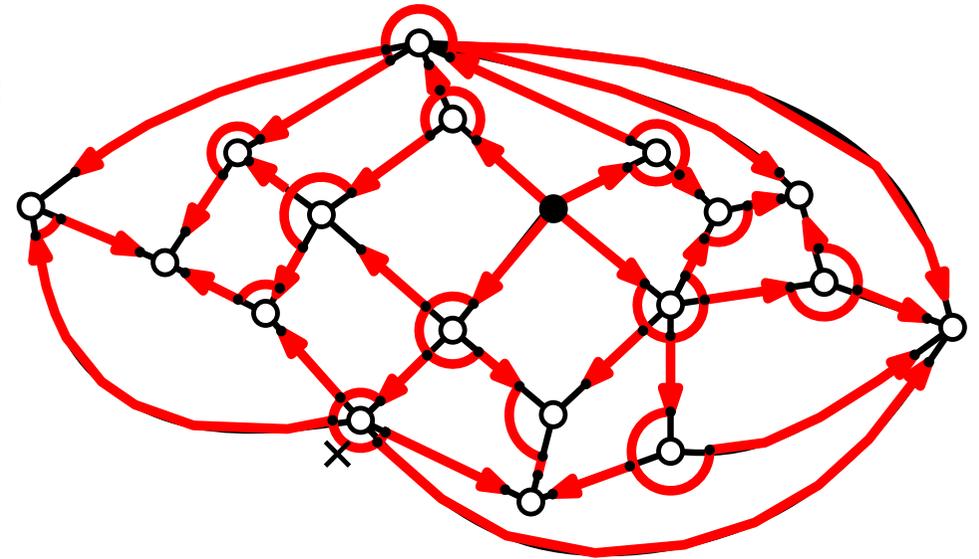
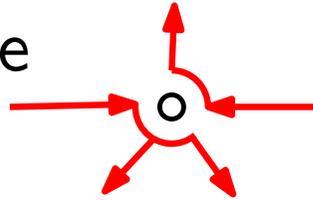
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

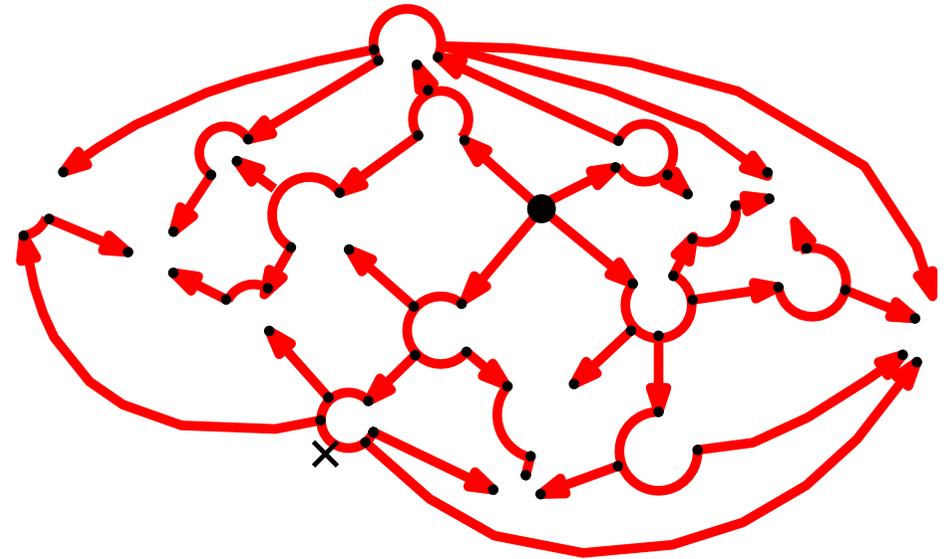
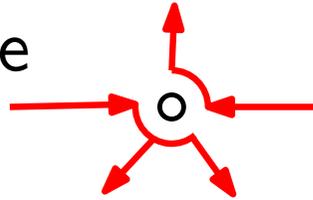
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

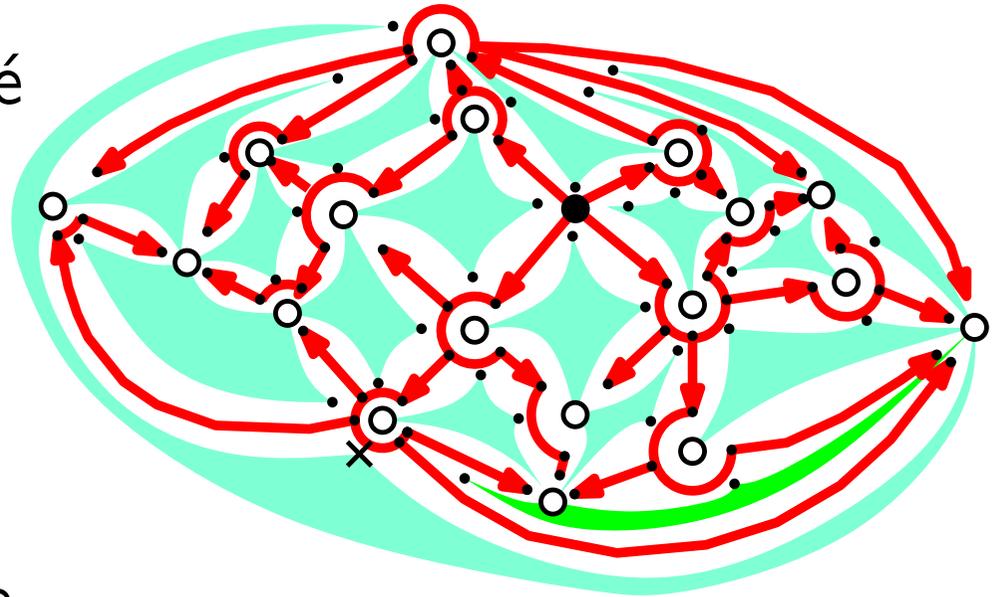
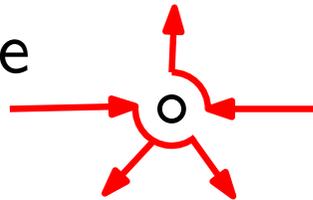


Les chemins rouges forment un arbre.

La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

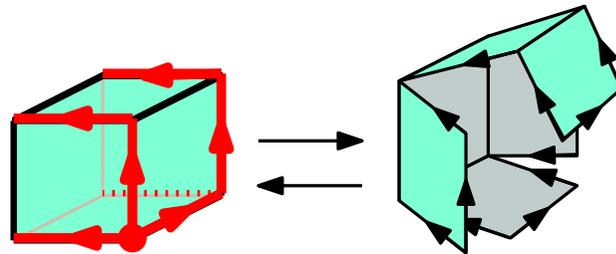
La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

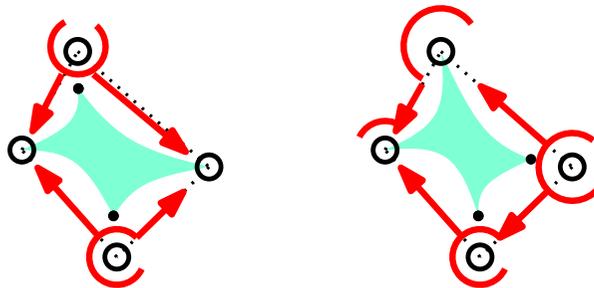


Les chemins rouges forment un arbre.

La découpe le long de cet arbre donne un patron



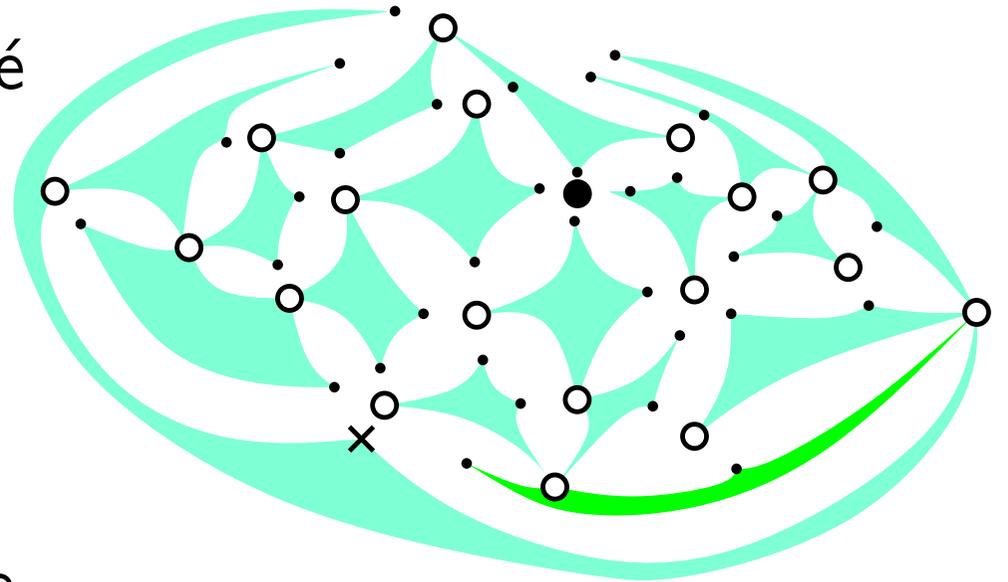
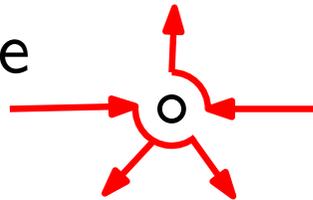
avec 2 types de carrés:



La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

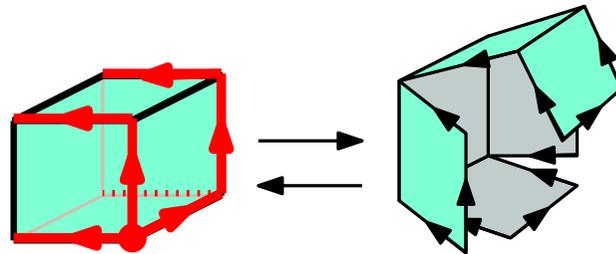
La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

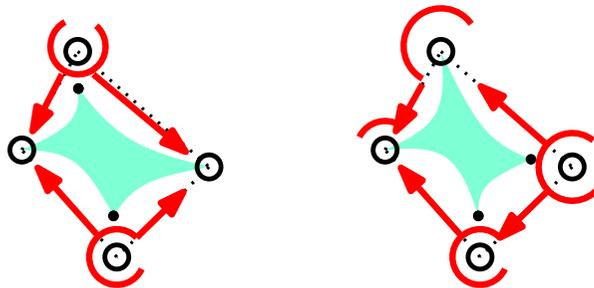


Les chemins rouges forment un arbre.

La découpe le long de cet arbre donne un patron



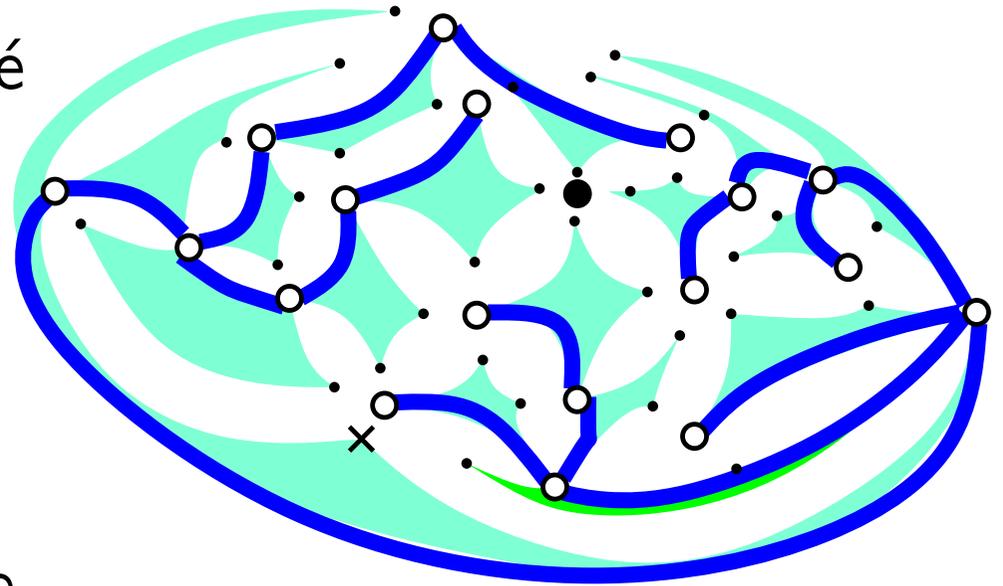
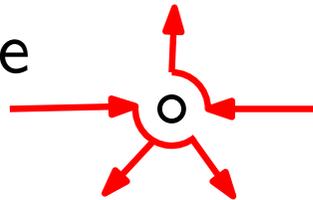
avec 2 types de carrés:



La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

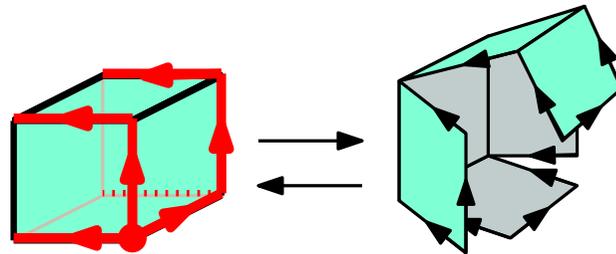
La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



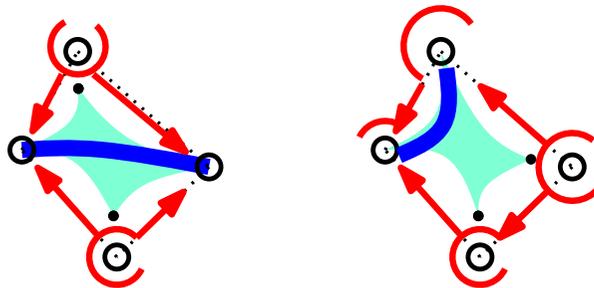
Les chemins rouges forment un arbre.

La découpe le long de cet arbre donne un patron



avec 2 types de carrés:

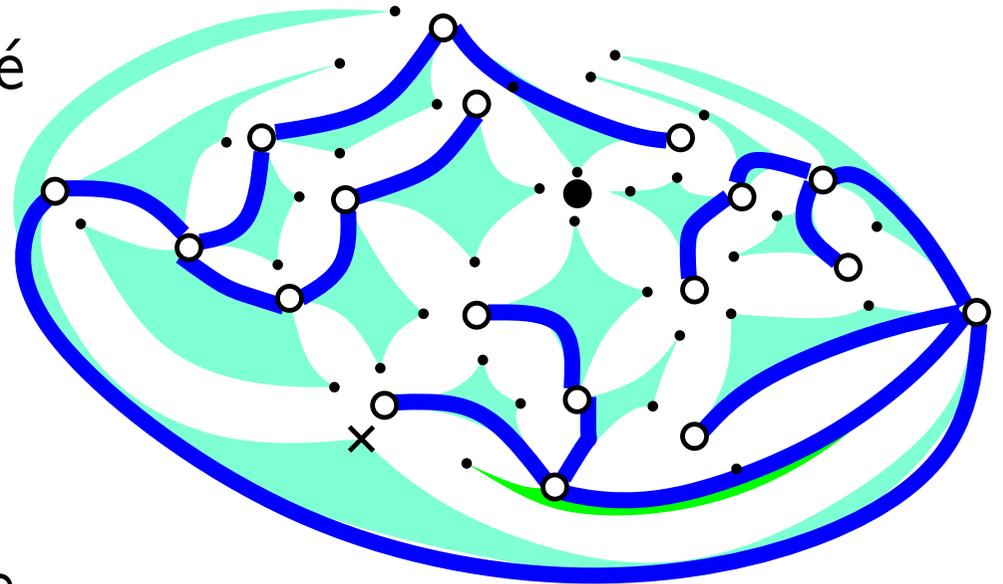
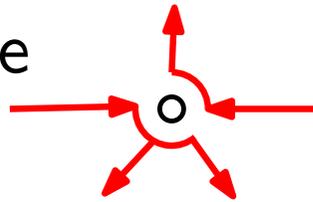
- transverse
- ou latéral



La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

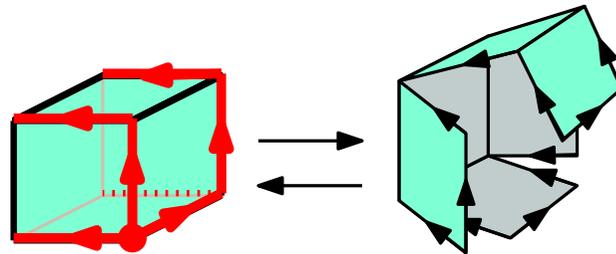
La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



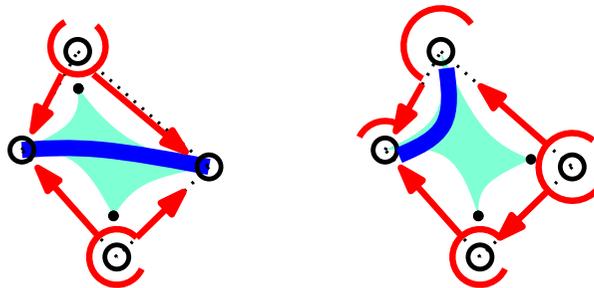
Les chemins rouges forment un arbre.

La découpe le long de cet arbre donne un patron

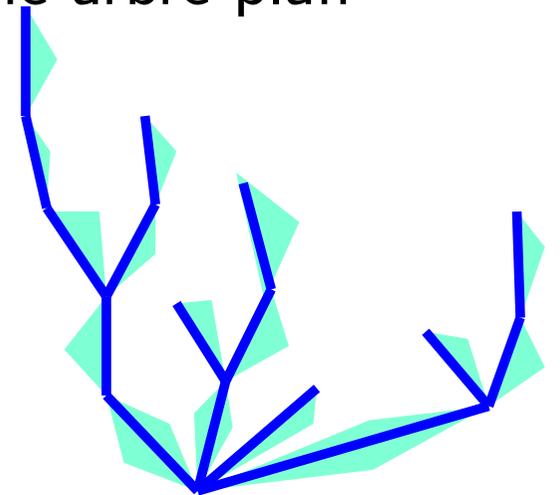


avec 2 types de carrés:

- transverse
- ou latéral



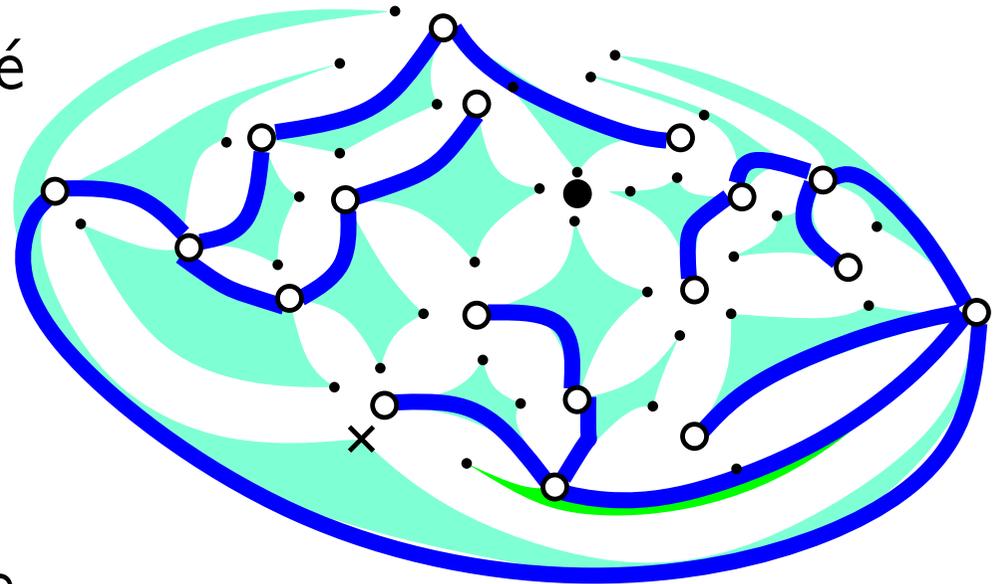
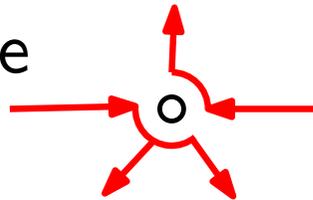
Ce patron se redessine comme arbre plan



La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

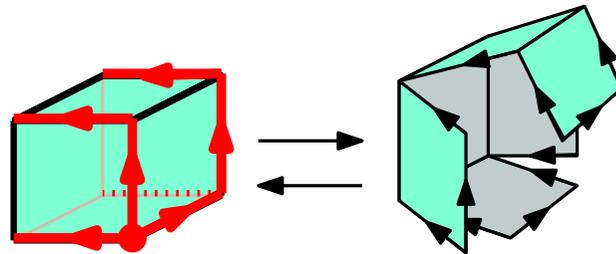
La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



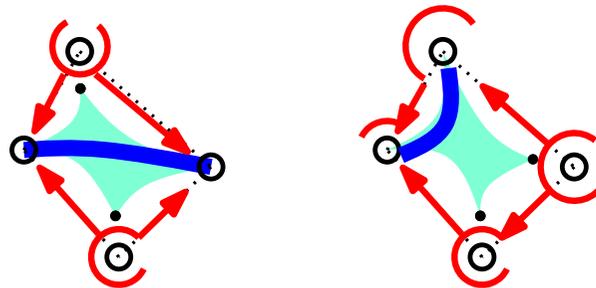
Les chemins rouges forment un arbre.

La découpe le long de cet arbre donne un patron



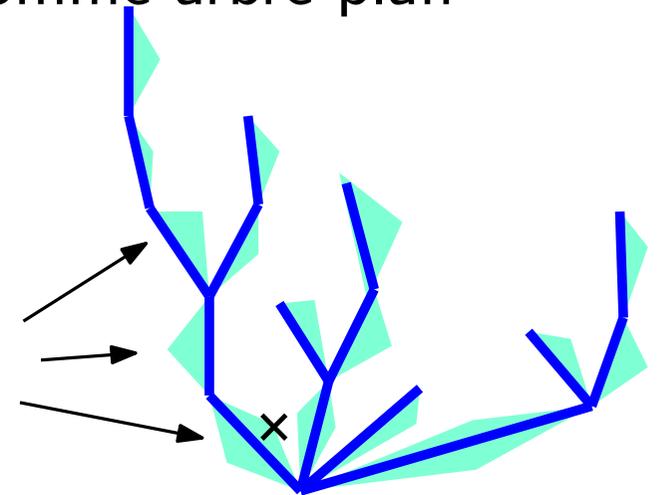
avec 2 types de carrés:

- transverse
- ou latéral



Ce patron se redessine comme arbre plan

3 types d'arêtes

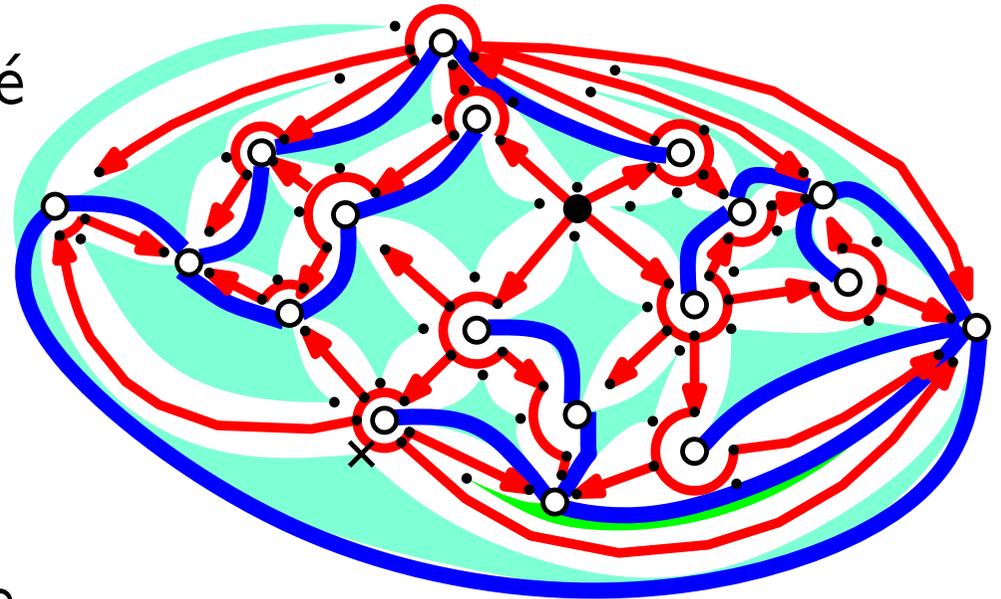
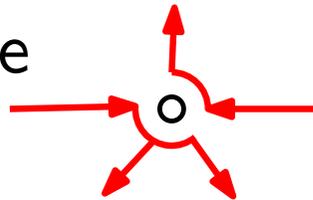


$$\Rightarrow 2 \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

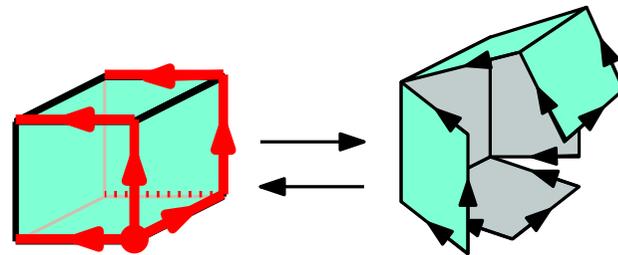
La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



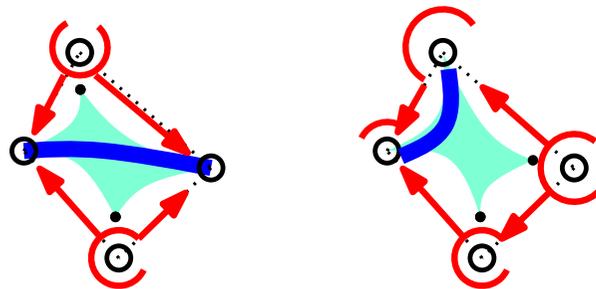
Les chemins rouges forment un arbre.

La découpe le long de cet arbre donne un patron



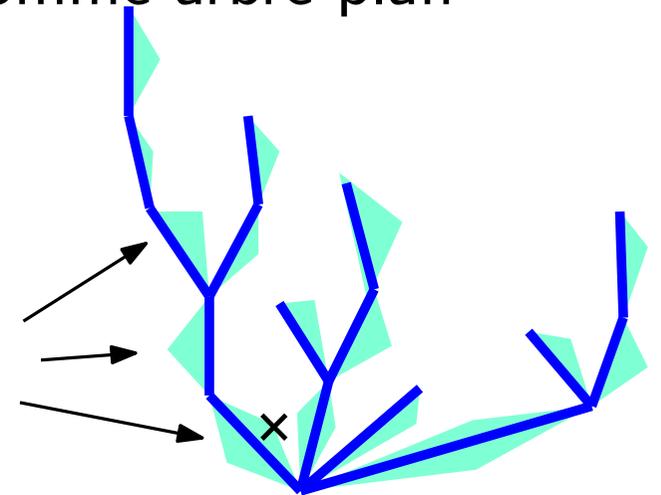
avec 2 types de carrés:

- transverse
- ou latéral



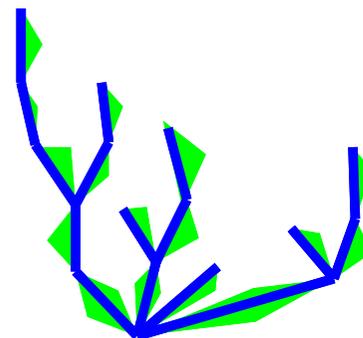
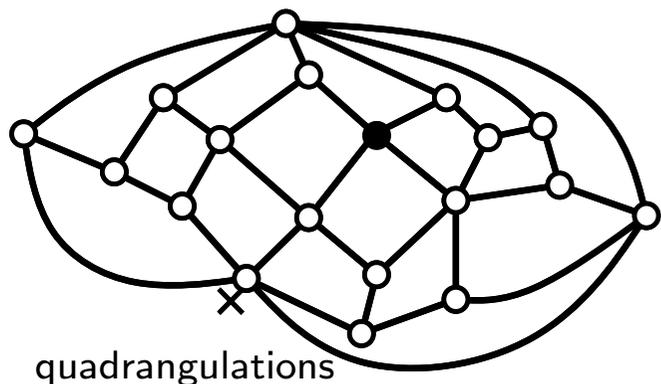
Ce patron se redessine comme arbre plan

3 types d'arêtes

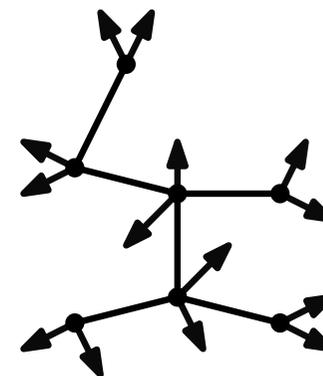
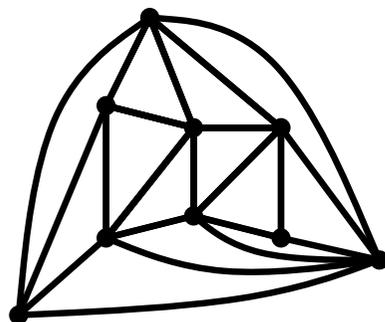


$$\Rightarrow 2 \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

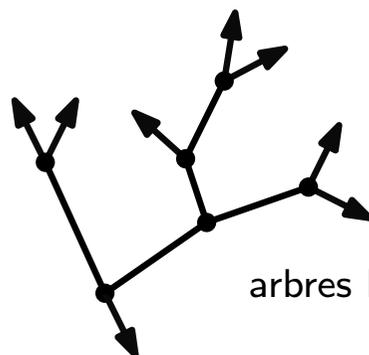
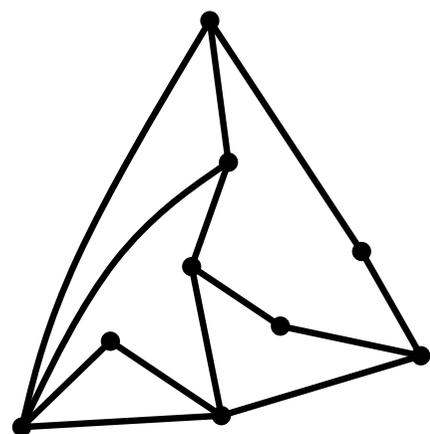
Cori-Vauquelin est "un exemple parmi d'autres"



$$\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$$



$$\frac{(4n-2)!}{n!(3n-2)!}$$



$$\frac{6}{n+2} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

et plus récemment une théorie

Le miracle bijectif se répète pour une dizaine de familles de cartes:
⇒ des patrons *context-free*, calculable par algorithme de parcours.

Cori-Vauquelin 1984, Arquès 1987, S. 1997, Bousquet-Mélou-S. 2000, Poulalhon, Bouttier, di Francesco, Gitter, Fusy, Bernardi, Miermont, Albenque, Ambjørn, Budd, ...

et plus récemment une théorie

Le miracle bijectif se répète pour une dizaine de familles de cartes:

⇒ des patrons *context-free*, calculable par algorithme de parcours.

Cori-Vauquelin 1984, Arquès 1987, S. 1997, Bousquet-Mélou-S. 2000, Poulalhon, Bouttier, di Francesco, Gitter, Fusy, Bernardi, Miermont, Albenque, Ambjørn, Budd, ...

et s'organise en théorie générale des liens entre algorithmes de parcours et patrons context-free via la notion d'orientations minimales

Bernardi-Fusy 2014, Albenque-Poulalon 2014

et plus récemment une théorie

Le miracle bijectif se répète pour une dizaine de familles de cartes:
⇒ des patrons *context-free*, calculable par algorithme de parcours.

Cori-Vauquelin 1984, Arquès 1987, S. 1997, Bousquet-Mélou-S. 2000, Poulalhon, Bouttier, di Francesco, Guitter, Fusy, Bernardi, Miermont, Albenque, Ambjørn, Budd, ...

et s'organise en théorie générale des liens entre algorithmes de parcours et patrons context-free via la notion d'orientations minimales

Bernardi-Fusy 2014, Albenque-Poulalon 2014

Récemment cette approche a été étendue à d'autres types d'objets bidimensionnels, les **revêtements ramifiés**, pour lesquels il faut remplacer les arbres plans par des arbres de Cayley.

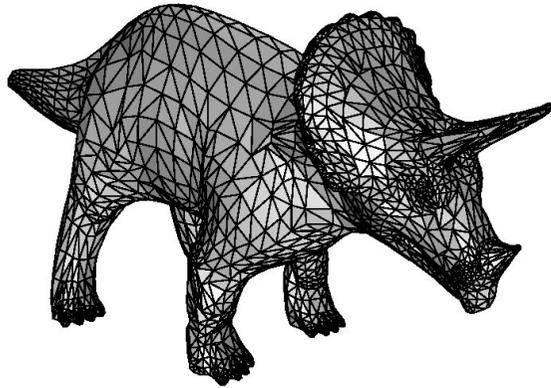
$$\#\{\text{arbres de Cayley}(n)\} = n^{n-2}$$

$$\#\{\text{revêtements}(n)\} = n^{n-3}(2n-2)!$$

Duchi-Poulalhon-S. 2014

Retour sur l'application à la compression de maillages

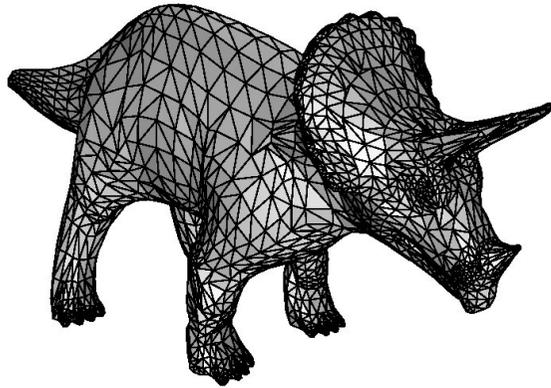
Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



maillage polygonal

Retour sur l'application à la compression de maillages

Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



maillage polygonal

géométrie

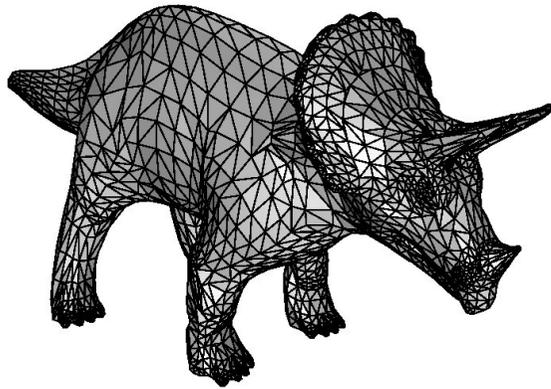
coordonnées (32 bits/arêtes)

combinatoire

carte (224 bits/arêtes)

Retour sur l'application à la compression de maillages

Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



maillage polygonal

géométrie →

coordonnées (32 bits/arêtes)

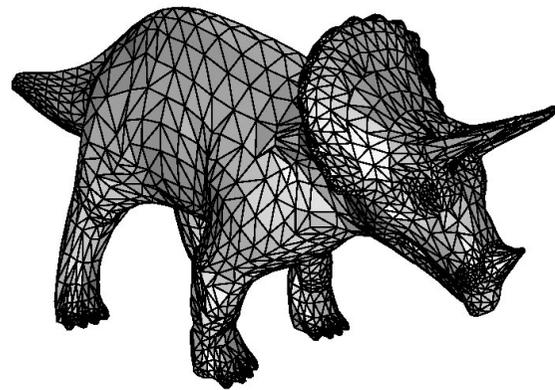
combinatoire →

Compresser ! (Rossignac et al. 90's)

carte (224 bits/arêtes)

Retour sur l'application à la compression de maillages

Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



maillage polygonal

géométrie

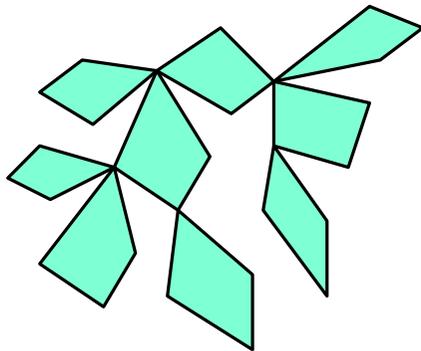
coordonnées (32 bits/arêtes)

combinatoire

Compresser ! (Rossignac et al. 90's)

carte (224 bits/arêtes)

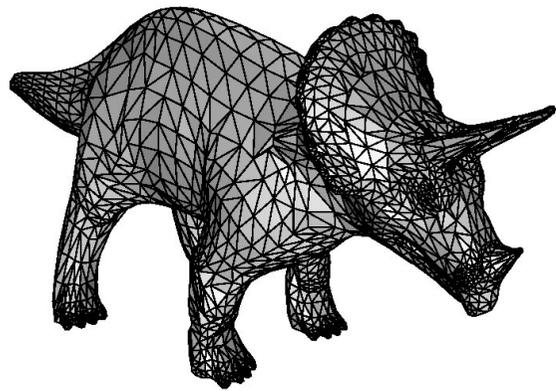
parcours
et découpage



patron canonique

Retour sur l'application à la compression de maillages

Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



géométrie

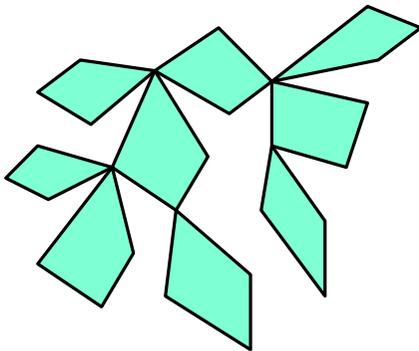
coordonnées (32 bits/arêtes)

combinatoire

Compresser ! (Rossignac et al. 90's)

carte (224 bits/arêtes)

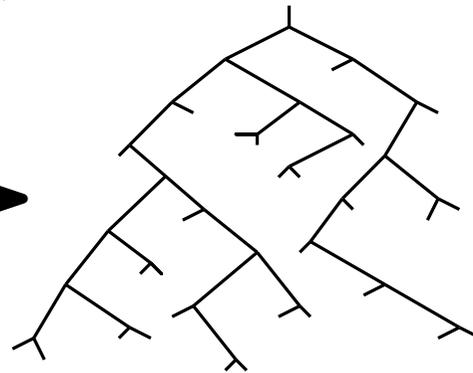
maillage polygonal



parcours
et découpage

simplification

≈ 1-to-1

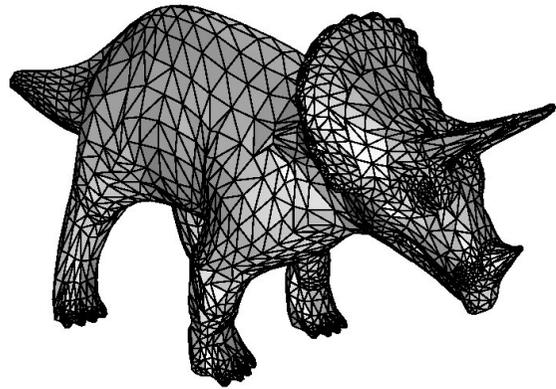


patron canonique

arbre binaire quelconque

Retour sur l'application à la compression de maillages

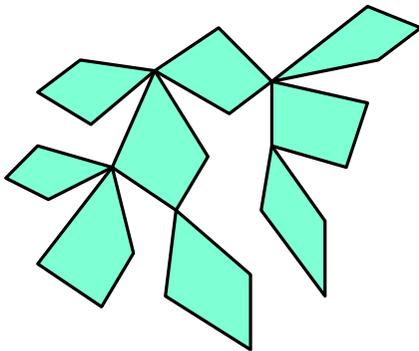
Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



géométrie → coordonnées (32 bits/arêtes)

combinatoire → **Compresser ! (Rossignac et al. 90's)**
carte (224 bits/arêtes)

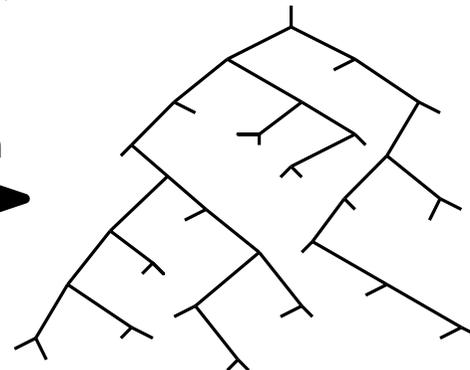
maillage polygonal



patron canonique

parcours
et découpage

simplification
≈ 1-to-1



arbre binaire quelconque

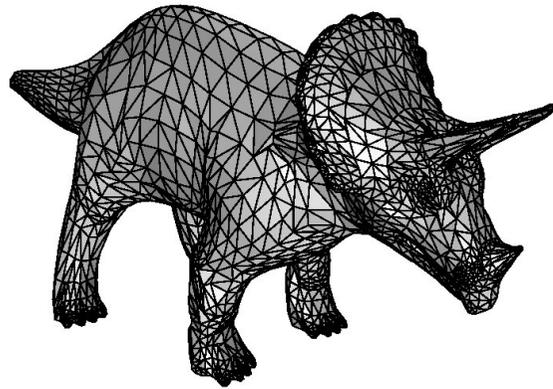
code prefixe
≈ 1-to-1

```
1110100101100011001111
1000100101001000011110
0010101001001011000110
1100100101001010010100
001001001010001000000
```

code optimal
de la carte
2 bits/arêtes

Retour sur l'application à la compression de maillages

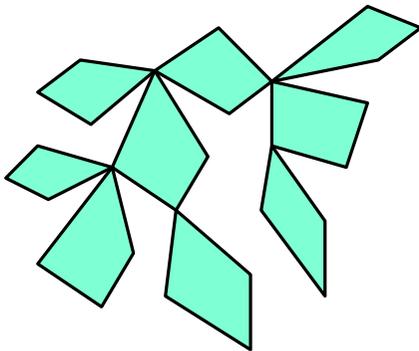
Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



géométrie → coordonnées (32 bits/arêtes)

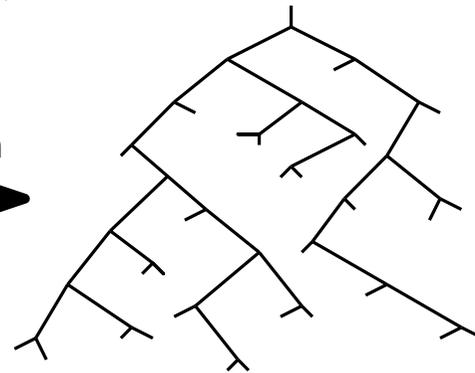
combinatoire → **Compresser ! (Rossignac et al. 90's)**
carte (224 bits/arêtes)

maillage polygonal



parcours
et découpage

simplification
≈ 1-to-1



code prefixe
≈ 1-to-1

```
1110100101100011001111
1000100101001000011110
0010101001001011000110
1100100101001010010100
001001001010001000000
```

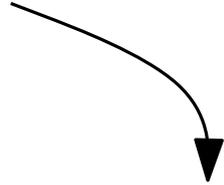
patron canonique

arbre binaire quelconque

code optimal
de la carte
2 bits/arêtes

Retour sur l'application à la compression de maillages

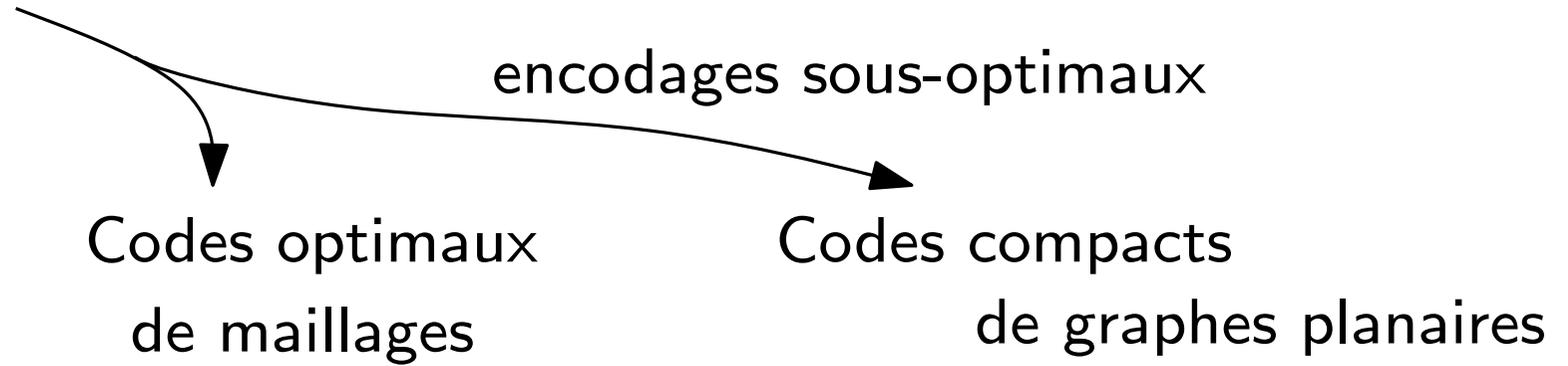
Bijections entre cartes et arbres



Codes optimaux
de maillages

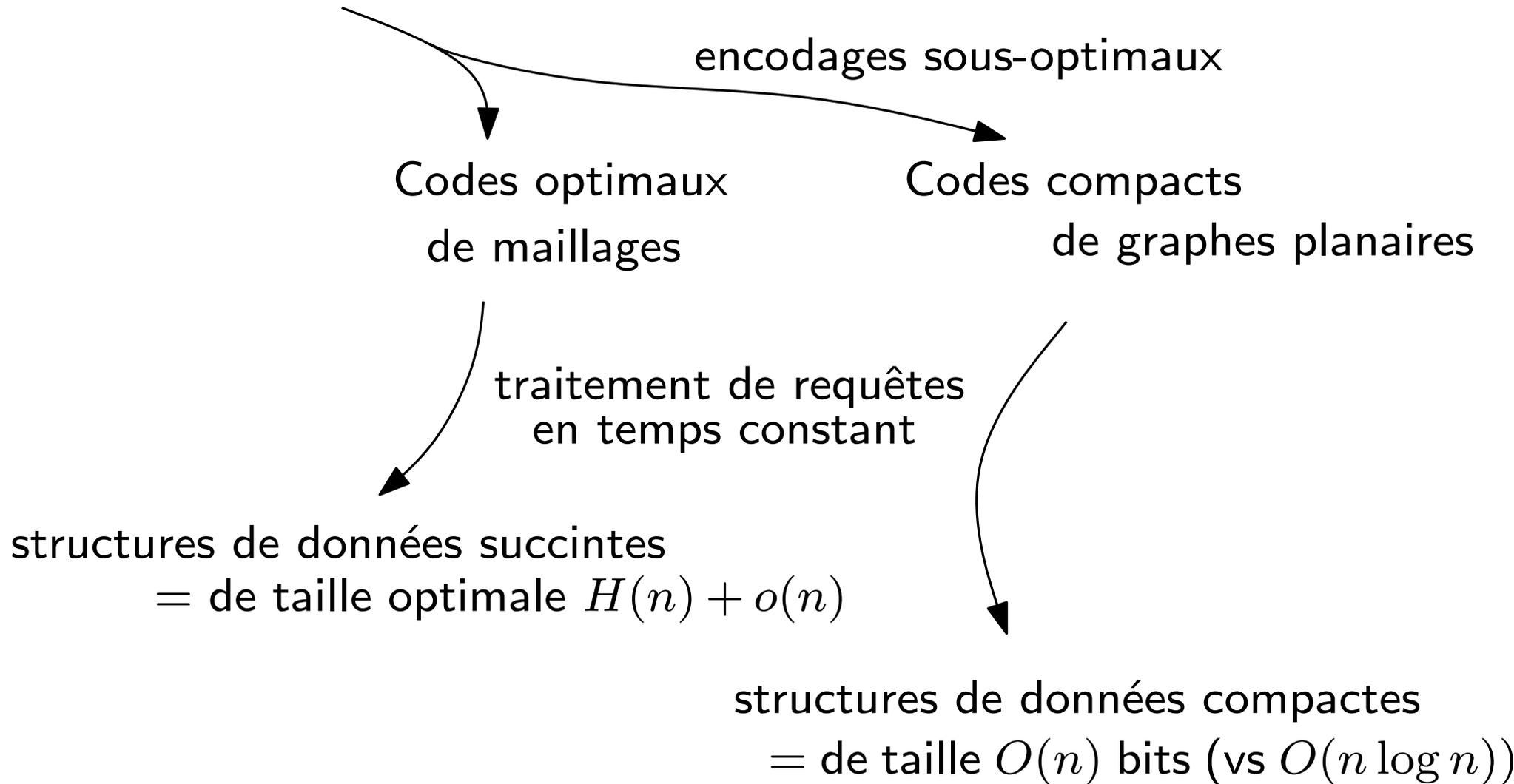
Retour sur l'application à la compression de maillages

Bijections entre cartes et arbres



Retour sur l'application à la compression de maillages

Bijections entre cartes et arbres



(travaux de et avec Castelli Aleardi, Devillers, Bonichon, Gavoille, Hanusse...)

Conclusion

Conclusion

arbres

cartes

arbres

formes fondamentales

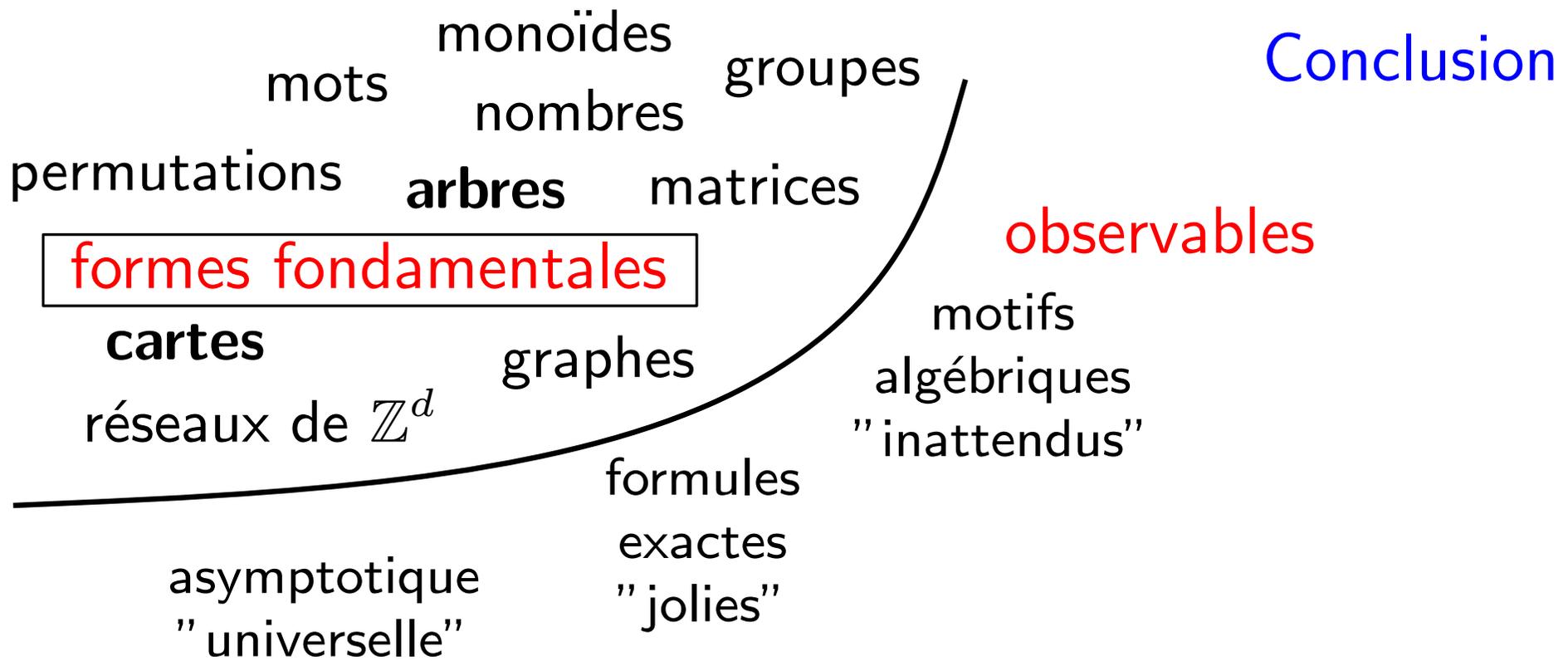
cartes

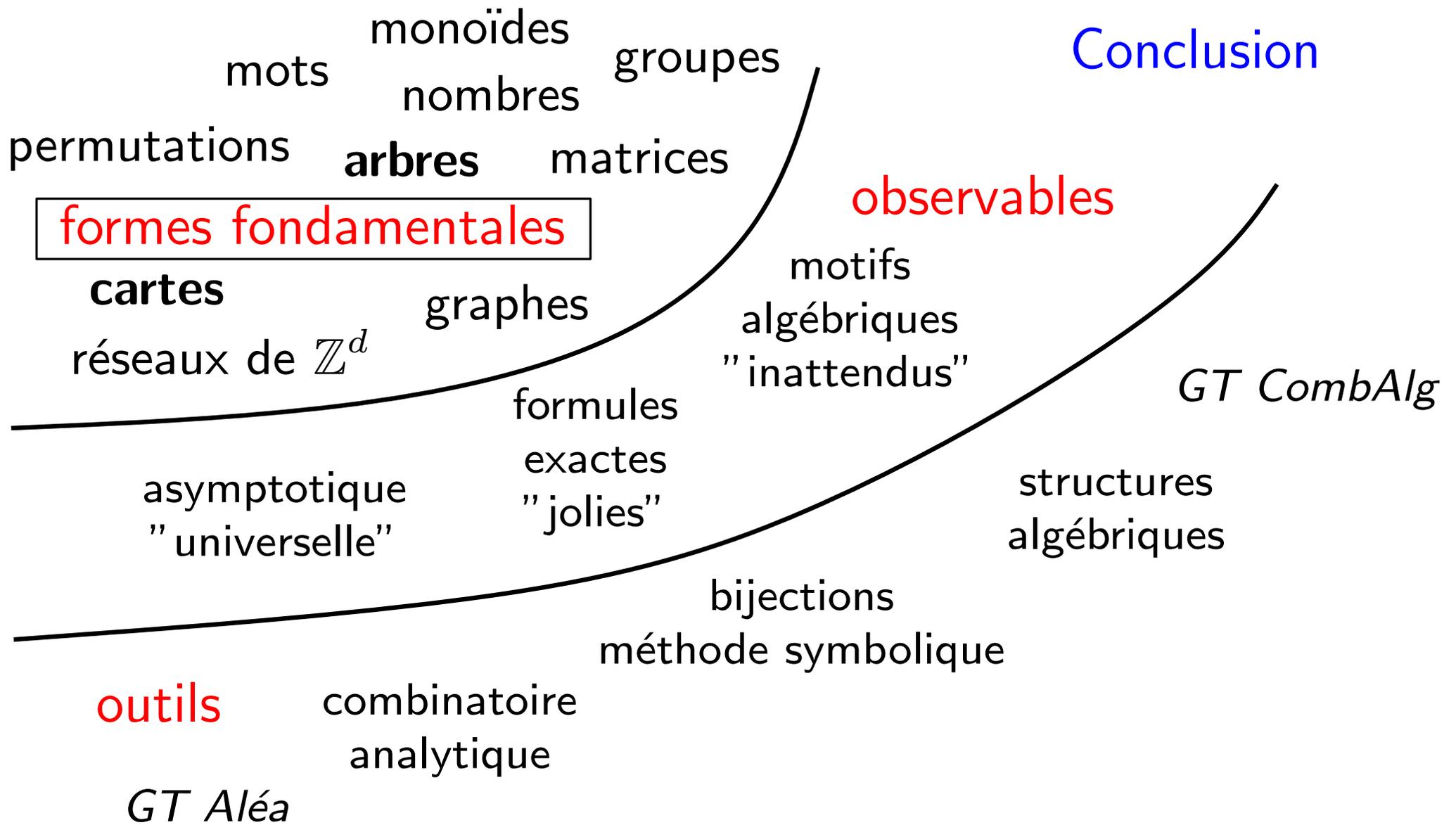
mots monoïdes groupes
nombres
permutations **arbres** matrices

formes fondamentales

cartes graphes
réseaux de \mathbb{Z}^d

Conclusion





Merci de votre attention !

Merci de votre attention !
et merci Mireille !